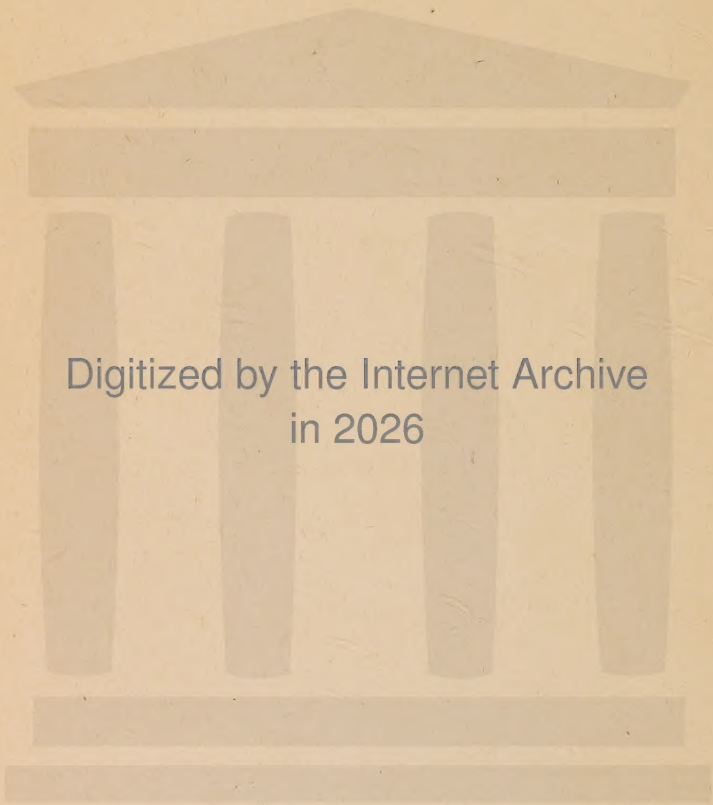
UNENDLICHE NICHTPERIODISCHE WELLENZÜGE IN EINER KLASSE VON REAKTIONS-DIFFUSIONS-GLEICHUNGEN

Analytische Eigenschaften von Poincaré Halbabbildungen

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Fakultät für Chemie und Pharmazie
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Claus Kahlert
aus Heidenheim/Brenz

1984


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41536517_0030

UNENDLICHE NICHTPERIODISCHE WELLENZÜGE IN EINER KLASSE VON REAKTIONS-DIFFUSIONS-GLEICHUNGEN

Analytische Eigenschaften von Poincaré Halbabbildungen

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Fakultät für Chemie und Pharmazie
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Claus Kahlert
aus Heidenheim/Brenz

1984

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Juli 1984

Dekan: Prof. Dr. J. Strähle

1. Berichterstatter: Prof. Dr. O.E. Rössler

2. Berichterstatter: Prof. Dr. F.F. Seelig

A B S T R A C T

KAHLERT, CLAUS:

UNENDLICHE NICHTPERIODISCHE WELLENZÜGE IN EINER KLASSE VON REAKTIONS-DIFFUSIONS-GLEICHUNGEN

Analytische Eigenschaften von Poincaré Halbabbildungen

Erregbare Reaktions-Diffusions-Systeme spielen über die chemische Kinetik hinaus eine wichtige Rolle in der Neurophysiologie und in anderen Bereichen. Eine derartige stückweise lineare Gleichung vom C^0-Typ (eine modifizierte Rinzel-Keller-Gleichung) wurde analytisch behandelt. Dabei konnten erstmals unendlich ausgedehnte, nichtperiodische (chaotische) Wellenzüge zeitlich konstanter Gestalt beschrieben werden. Die Differentialgleichung läßt sich wegen der stückweisen Linearität in ein System impliziter, transzendenter Gleichungen umformen. Jede dieser impliziten Gleichungen beschreibt eine Poincaré Halbabbildung, die, unabhängig vom speziellen Beispielsystem, in einer kanonischen Formulierung untersucht wurde. Eine Voraussetzung für das Auftreten chaotischer Lösungen ist ein positiver Lyapunov Exponent. Dieser wird durch einen Verzweigungsschnitt (die "kritische Spirale") im Definitionsbereich einer Halbabbildung erreicht. Die kritische Spirale konnte hier erstmals in einer analytischen Form angegeben werden. Dadurch gelang es, eine Reihe von Phänomenen vorherzusagen. Bereits bekannte numerische Resultate konnten aufgrund der Eigenschaften der kritischen Spirale erklärt werden. In ihren innersten Windungen konvergiert die kritische Spirale gegen eine logarithmische Spirale und ermöglicht dadurch die Bildung von abzählbar unendlich vielen Smale Horseshoes. In der letzten (äußersten) Windung kann der Spiralradius wieder abnehmen, so daß sich die Spirale u.U. selbst schneidet. Dies führt auf neue, besonders komplizierte chaos-erzeugende Trennungsmechanismen. Die Bedingungen für die drei möglichen Spiraltypen an die kanonischen Systemparameter konnten formuliert werden. Eine relativ einfache Bestimmung der Definitions- und Werte-Bereiche der Halbabbildungen erlaubte es zu entscheiden, ob die potentiell chaoserzeugenden Strukturen dieser Abbildungen von der vollen Poincaré Abbildung auch genutzt werden. Die gewonnenen Resultate gestatten eine weitgehende Kartierung des kanonischen Parameterraums einer ganzen Systemklasse. Das qualitative dynamische Verhalten von Repräsentanten dieser Klasse kann bereits aufgrund der Systemparameter allein vorhergesagt werden.

A B S T R A C T

KAHLERT, CLAUS:

INFINITE NONPERIODIC WAVETRAINS FOR A CLASS OF REACTION DIFFUSION EQUATIONS

Analytical Properties of Poincaré Halfmaps

Excitable reaction diffusion systems are of interest not only in chemical kinetics but also in neurophysiology and epidemiology, e.g. . A piecewise-linear (C^0) example, a modified Rinzel Keller equation, is treated analytically. Infinite nonperiodic wavetrains of constant shape are found for the first time. The equation gives rise to a system of implicit transcendental equations. Each implicit equation describes a Poincaré halfmap, treated here in a canonical formulation. One condition for the appearance of chaotic solutions is a positive Lyapunov exponent. This possibility follows from a branch cut (the "critical spiral") in the domain of one halfmap. The critical spiral is presented in a analytical form for the first time. Earlier numerical results are thereby explained. The innermost turns of the critical spiral converge towards a logarithmic spiral, thereby allowing for the formation of a countable number of Smale horseshoes. In the last (outermost) turn, the radius of the spiral may decrease again, so that the spiral may even intersect itself. This leads to a new, complicated chaos producing separation mechanism. The conditions for the three possible types of critical spirals are formulated in terms of the canonical system parameters. A straight forward determination of the domains and ranges of the halfmaps allows one to check whether or not the potentially chaos-producing structures of the halfmaps will be used by the complete Poincaré map. The results give a rather complete cartography of the canonical parameter space for a whole class of systems. The qualitative dynamical behaviour of any repesentative of the class can be predicted from the parameter values alone.

Für Hanne

Die vorliegende Arbeit entstand in der Zeit von April 1982 bis Juni 1984 am Lehrstuhl für Theoretische Chemie der Universität Tübingen unter der Anleitung von Prof. O.E. Rössler. Ihm danke ich herzlich für viele anregende Diskussionen. Prof. Seelig sowie allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Lehrstuhls danke ich für das gute Betriebsklima.

Bei der Studienstiftung des deutschen Volkes möchte ich mich für die Stipendien und die anderen Förderungen während des Studiums und der Promotion bedanken.

Erschwerungen entstehen hier daraus, daß die sachhaft-ursächliche Reihung keineswegs geradlinig und ungebrochen fortgeht. Nichts von alldem bleibt gerade bloß ursächlich mit sich allein, im Woher und Warum, nicht zuletzt im Wohin und Wozu geht es häufig **wechselwirkend** her, das Bewirkte greift auf die Ursache zurück, verändert sie selber, das nicht immer nur nachträglich, sondern oft und wichtig, indem ein zu Bewirkendes selber von vornherein eigens und eigen kausal wikt. ...

Erst die Dialektik, mit dem Grund nicht als ratio von vornherein, sonden als intensiver Daßheit, mit der Folge nicht als automatischer Unweigerlichkeit schlechthin, sondern als wendungsfähigem, wendungsreichem, wenngleich geordnetem Prozeß, macht den Kausalsatz aus einem a priori analytischen zu einem a posteriori erweiternden, synthetischen. Und sie nimmt ihn zugleich nach dem, was er entwickelt wert ist, in sich auf: als **Wechselwirkung**, als **Kausalität der Widersprüche**, als **Agens-Agendum utopischer Ur-Sache**.

Ernst Bloch, Experimentum Mundi

Inhalt

0	Einleitung	4
1	Das Modellsystem	8
2	Darstellung des Problems	20
2.1	Halbabbildungen	20
2.2	Der kanonische Parameterraum	24
3	Das unendlich steife System ($\rho \to \infty$)	26
3.1	Die Extrema der Spirale	28
3.2	Ein Fixpunktsatz	30
3.2.1	Die Stabilität der Fixpunkte	34
3.3	Die Eigenschaften des reduzierten Systems	42
4	Die Geometrie der Trennebene S	44
4.1	Statische und dynamische Mannigfaltigkeiten	44
4.2	Der x_0-Schnitt	51
4.3	Der S-Schnitt	52
4.3.1	Der cartesische Punkt x_C	58
4.3.2	Die Bedingung für einfache Isolae	62
4.3.3	Die Trajektoriendichte auf einer einfachen Isola	74
4.4	Die Bilder der Geraden $\xi=0$	76
5	Die kritische Spirale γ	82
5.1	Die Unterteilung der Geraden W	83
5.2	Die kritische Spirale im x_0-Schnitt	88
5.2.1	Die korrespondierende berührende Trajektorie	91
5.2.2	Die Länge der kritischen Spirale	93
5.2.3	Die Extrema der kritischen Spirale	96
5.3	Die kritische Spirale in S	102
5.3.1	Kurven gleicher Abbildungsdauer	102

5.3.2	Die Faltung der kritischen Spirale	109
5.3.2.1	Das Bild der kritischen Spirale	110
5.3.2.2	Doppelt berührende Trajektorien	113
5.3.2.3	Bedingung für eine Faltung der kritischen Spirale	116
5.4	Die Bilder der Schnittlinien $\Gamma(r_0)$ unter $\bar{P}$	120
6	Die Abbildung $\tilde{P}$	130
6.1	Das Urbild des homoklinoiden Punktes	132
7	Die Komposition der Halbabbildungen	137
7.1	Der Attraktor	137
7.2	Die Abstimmung der Definitions- und Werte-Bereiche	141
7.3	Beispielberechnungen	145
8	Diskussion und Ausblick	149
8.1	Die Güte stückweise linearer Systeme	149
8.2	Die Komplexität der Lösungen	152
8.3	Schluß	155
	Literaturverzeichnis	157

Vorbemerkung zur Nomenklatur

In dieser Arbeit wird eine Reihe von Größen alternativ mit einer Querung oder einer Tilde versehen (z.B. $\bar{\delta}$ und $\tilde{\delta}$). Zur Vereinfachung der Darstellung werden in Ausdrücken, in denen Querung oder Tilde stehen können, diese Größen mit einem hochgestellten Dach gekennzeichnet (z.B. $\hat{\delta}$).
So ist

$$\hat{\delta} := d - \hat{U}$$

äquivalent zu den zwei Gleichungen

$$\bar{\delta} := d - \bar{U}$$

und

$$\tilde{\delta} := d - \tilde{U} \quad .$$

0 Einleitung

Mit der Entwicklung leistungsfähiger Rechenanlagen und der Verfeinerung numerischer Methoden (s. z.B. [Gea 1971]) gelang es in den letzten Jahren, für eine Reihe realer physikalischer, chemischer und biologischer Systeme, eine ausgezeichnete Übereinstimmung zwischen Modellrechnungen (mit dynamischen Systemen) und den gefundenen Meßwerten zu erzielen. Diese Ergebnisse, so wichtig und nützlich sie besonders im Bereich der Prozess-Überwachung und -Steuerung (s. z.B. [Gi,Ep 1981]) sind, suggerieren darüber hinaus häufig ein Gütekriterium für mathematische Modelle, das sich ausschließlich an der Übereinstimmung von numerischen Lösungen mit experimentell ermittelten Werten orientiert.

Dieser quantitative Gütebegriff erscheint zwar auf den ersten Blick einfach und praxisnah, erweist sich jedoch sowohl in der konkreten Anwendung als auch bei der Modellbildung als unbefriedigend. Ein wesentlicher Grund hierfür ist, daß nach einem solchen Kriterium chaotische Systeme grundsätzlich nicht gut modelliert werden können, weil für diese Dynamiken, wegen der endlichen Rechengenauigkeit jeder Maschine, die Korrelation zwischen Simulationsergebnissen und Meßwerten nach endlicher Zeit zerfällt [Ru 1979] .

Der wesentliche Einwand gegen den oben beschriebenen Gütebegriff tritt allerdings bei der Modellbildung auf. Grundsätzlich können unterschiedliche Differentialgleichungen (in bestimmten Parameterbereichen) sehr ähnliche Lösungen besitzen. Dies bedeutet aber, daß ein Modell eine Meßreihe gut reproduzieren kann, ohne eine strukturelle Verwandtschaft zum realen System zu besitzen. Darüber hinaus erlaubt in der Regel ein Differentialgleichungssystem zunächst nicht, zwischen den wesentlichen Wirkungsmechanismen und Störtermen oder exogenen, "von Hand" eingefügten, Korrekturen zu unterscheiden. Die Bewichtung

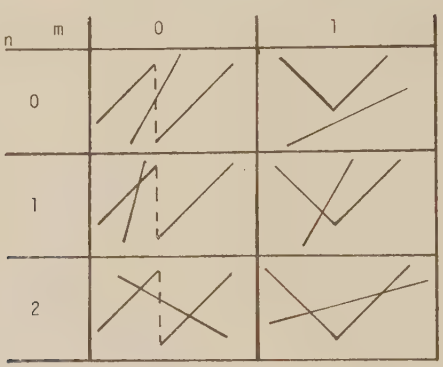
der einzelnen Faktoren geschieht oft erst durch Vereinfachungen, wie sie bei Steady State Approximationen [Gö,Se 1975] oder Singular-Perturbation Techniken [Fei,Or 1977] angewandt werden.

Das Bestreben einer Modellbildung sollte es sein, die wesentlichen Charakteristika des realen Systems herauszuarbeiten und in der mathematischen Struktur des Modells adäquat darzustellen. Hierzu reicht es allerdings nicht aus, eine Lösung quantitativ zu beurteilen, vielmehr zeigt sich die strukturelle Verwandtschaft zwischen realem System und Modell in einem vergleichbaren qualitativen Verhalten der Lösungen und damit in einer Übereinstimmung der Bifurkationsmuster. So gesehen können bereits einfache Modelle, die die Meßwerte des realen Systems nur mäßig reproduzieren, dennoch gute Approximationen sein, wenn sie über weite Bereiche des Parameterraums das gleiche qualitative Verhalten zeigen.

In dieser Arbeit soll eine besonders einfache Systemklasse daraufhin untersucht werden, inwieweit sie Prototypen für bestimmte dynamische Verhaltensmuster enthält. Die einfachsten nichtlinearen Systeme sind stückweise lineare Differentialgleichungen, bei denen die Nichtlinearitäten in Spitzen und Sprungstellen scharf lokalisiert sind. Hiervon wiederum sind die einfachsten Typen solche, die nur eine Nichtlinearität in einer Komponente besitzen.

Auch solche Systeme mit lediglich zwei linearen Teildynamiken können noch eine überaus komplizierte Phasenraumgeometrie aufweisen; erst wenn die Grenze zwischen den Trägermengen der Teildynamiken eine ebene Hyperfläche ist, werden die Verhältnisse überschaubarer. In diesem Fall lassen sich alle möglichen Systeme in sechs Klassen einordnen. Jede dieser Systemklassen wird im folgenden durch ein Symbol (C^m,n) charakterisiert. Dabei ist $m \in \{0,1\}$, es gibt die Differenzierbarkeit des Flusses an, n

ist aus {0,1,2} und legt die Anzahl der realen Steady States (vergl. [Ka 1981]) des Systems fest.



Tab. 1. Schematische Darstellung der Nullklinen von zweivariablen Systemen aus (C^m,n).

Systeme mit stetig differenzierbarem Fluß (C^1,n) wurden in der Literatur bereits verschiedentlich auf chaotische Lösungen hin untersucht [Rö 1979; Rö 1981; Sp 1981; Ue,Rö 1983]. Dabei zeigte sich ([Ue,Rö 1983]), daß schon eine getrennte Betrachtung der beiden linearen Teildynamiken eine tiefere Einsicht in die Probleme erlaubt.

Unabhängig von diesen Entwicklungen wurden Systeme der Klasse $(C^0,1)$ für die Modellierung von Reizleitungsphänomenen [Ri,Ke 1973; Ev 1982; Fe 1982; Ha 1982; Ka,Rö 1983] benutzt. Obgleich endliche Wellenzüge in dieser Thoerie durch homokline Trajektorien [Ca 1977] dargestellt werden, wurde die hierin liegende Verbindung zur Theorie des Chaos bisher nicht ausgearbeitet. Ein anderer Ansatz zur Beschreibung chaotischer Wellenzüge in einem Hodgkin-Huxley-Modell [Ho,Hu 1952] findet sich in [Ca 1979].

In der vorliegenden Arbeit sollen nun die Charakteristika linearer Teildynamiken in einer analytischen Form präsentiert werden. Dabei stehen die chaoserzeugenden Strukturen (im wesentlichen ein Verzweigungsschnitt in der durch die Dynamik erzeugten Poincaré Abbildung [Po 1899]) im Mittelpunkt des Interesses. Die analytischen und numerischen Resultate sowie die erhaltenen Erkenntnisse über das Zusammenwirken der Teildynamiken werden anhand eines bekannten Beispielsystems veranschaulicht.

1 Das Modellsystem

Als konkretes Beispiel dient in dieser Arbeit eine verallgemeinerte Rinzel-Keller-Gleichung der Nervenleitung [Ri,Ke 1973; Ka,Rö 1983]. Diese wurde bereits unter verschiedenen Aspekten behandelt, deshalb seien ihre statischen und spektralen Eigenschaften hier nur kurz referiert.

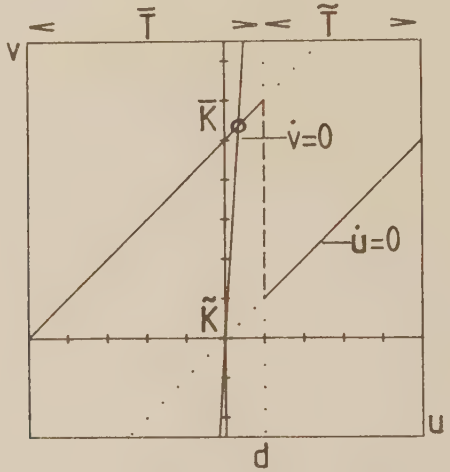


Abb. 1. Nullklinenbild des lokalen Reaktionssystems.
Achsen: u = -1 .. 1, v = -0.5 .. 1.5.
Systemparameter: b = 1, d = 0.2, e = 15.

Das vollständige Modell besteht aus einem Reaktions-Diffusions-System in einer Raumdimension mit einer erregbaren lokalen Reaktionskinetik, deren Nullklinenbild (aus dem die Einteilung des Phasenraums in die zwei Trägermengen $\bar{T}$ und $\tilde{T}$ der Teildynamiken deutlich wird) in Abb. 1 dargestellt ist. Dabei wird lediglich die erste Substanz (u) der Diffusion unterworfen, sie hat die Rolle einer Triggervariable [Wi 1980].

Die Systemgleichung lautet in der allgemeinen Formulierung:

$$\begin{aligned} u_t &= D_{uu} u_{rr} + \mu\left[-u + v - b + \Theta(u-d)\right] \\ v_t &= -eu + v \end{aligned} \qquad (1)$$

Durch eine Reskalierung (räumliche Streckung um den Faktor $1/\sqrt{D_{uu}}$) erhält die Diffusionsmatrix **D** die einfache Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, die von nun an verwendet wird.

In dieser Arbeit sollen nur Wellenzüge zeitlich konstanter Gestalt betrachtet werden, was Transients und Einschwingvorgänge unberücksichtigt läßt, dafür aber zu einer sehr weitreichenden formalen Vereinfachung führt, die es erlaubt, das Problem als gewöhnliche Differentialgleichung zu formulieren. Hierzu definieren wir eine Wellenvariable

$$\phi := r - c \cdot t \qquad (2)$$

(wobei c die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Wellenzuges ist), mit der das gesamte raumzeitliche Verhalten beschrieben werden kann.

Diese beiden Schritte (Reskalierung und Einführung einer Wellenvariable) vereinfachen die partielle Differentialgleichung (1) zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} -cu' &= u'' + \mu\left[-u + v - b + \Theta(u-d)\right] \\ -cv' &= -eu + v \end{aligned} \qquad (3)$$

dabei ist $' = d/d\phi$.

Durch die Einführung einer zusätzlichen Variable

$$w := u' \tag{4}$$

entsteht aus (3) ein dreidimensionalen System 1. Ordnung:

$$\boxed{\begin{aligned} u' &= w \\ v' &= \frac{eu - v}{c} \\ w' &= \mu\left[u - v + b - \Theta(u-d)\right] - cw \end{aligned}} \quad . \tag{5}$$

Diese Differentialgleichung wurde in [Ka 1981; Ka,Rö 1983] mit natürlichen und zyklischen Randbedingungen auf beliebig lange endliche Wellenzüge hin untersucht und soll auch in dieser Arbeit als dynamische Grundgleichung des Beispielsystems dienen.

Der Phasenraum von (5) läßt sich, wegen des Sprungs in der Inhomogenität, auf natürliche Weise in zwei Abschnitte

$$\begin{aligned} \overline{T} &:= \{(u,v,w)^T | u<d\} \\ \text{und} \qquad \widetilde{T} &:= \{(u,v,w)^T | u>d\} \end{aligned} \tag{6}$$

unterteilen; diese werden durch die Ebene

$$S := \{(u,v,w)^T | u=d\} \tag{7}$$

voneinander getrennt. Hier erweist es sich als vorteilhaft, folgende Größen zu definieren:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &:= 1 \\ \tilde{\sigma} &:= -1 \quad , \end{aligned} \tag{8}$$

damit kann (6) kompakt als

$$\hat{T} := \{(u,v,w)^T \,|\, u<\hat{\delta}d\} \tag{6a}$$

geschrieben werden.

Die Dynamiken auf den beiden Phasenraumhälften unterscheiden sich, wie aus (5) ersichtlich ist, lediglich durch ihre Inhomogenitäten, während die dynamische Matrix **B** in beiden Fällen dieselbe ist. Damit lauten die Systemgleichungen

auf $\bar{T}$:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ e/c & -1/c & 0 \\ \mu & -\mu & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \tag{9a}$$

und auf $\tilde{T}$:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ e/c & -1/c & 0 \\ \mu & -\mu & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b-1 \end{pmatrix} \tag{9b}$$

Die Koordinaten des Steady State $\bar{L}$ von (9a) sind somit:

$$\bar{U} = \frac{b}{e-1} \;,\; \bar{V} = \frac{e \cdot b}{e-1} \;,\; \bar{W} = 0 \tag{10}$$

Da nur in einem Parameterbereich, der die Bedingungen

$$ed > b + d$$

und (11)

$$e > 1$$

erfüllt, Erregungswellen existieren können [Ka 1981], soll auch nur dieser Bereich hier untersucht werden. Damit folgt unmittelbar aus (10) und (11)

$$d > \frac{b}{e-1} = \bar{U} \tag{12}$$

d.h., der Steady State $\bar{L}$ liegt nach (6) in $\bar{T}$, ist also ein realer Steady State.

Für die in $\tilde{T}$ wirkende Dynamik (9b) lauten die Koordinaten des Steady State $\tilde{L}$:

$$\tilde{U} = \frac{b-1}{e-1} \;,\; \tilde{V} = \frac{e(b-1)}{e-1} \;,\; \tilde{W} = 0 \tag{13}$$

Hierfür folgt aus (11) und (13)

$$\tilde{U} = \frac{b-1}{e-1} < \frac{b}{e-1} < d \tag{14}$$

Dieser Steady State liegt demnach ebenfalls in $\bar{T}$, es handelt sich somit um einen virtuellen Steady State [Ka 1981].

Nachdem bisher die Geometrie des Phasenraums kurz skizziert wurde, sollen nun noch die spektralen Eigenschaften der Dynamik und die damit verbundenen Strukturen diskutiert werden. Die Eigenwerte der dynamischen Matrix $\mathbf{B}$ sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^3 - \lambda^2 \operatorname{tr} \mathbf{B} + \lambda \min \mathbf{B} - \det \mathbf{B} = 0 \quad , \tag{15}$$

wobei

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \mathbf{B} &= -\frac{c^2+1}{c} \\ \min \mathbf{B} &= 1 - \mu \\ \det \mathbf{B} &= \frac{-\mu}{c}(e-1) \end{aligned} \tag{16}$$

sind.

Die Wurzeln von (15) können nach der cardanischen Formel bestimmt werden (s. Abb. 2, dort ist das Spektrum von **B** als Funktion von c dargestellt). Diese Rechnung ist in [Ka 1981] ausgeführt und soll hier nicht wiederholt werden, da sich die wichtigen dynamischen Größen, die über das Auftreten chaotischer Lösungen entscheiden, auch einfacher abschätzen lassen.

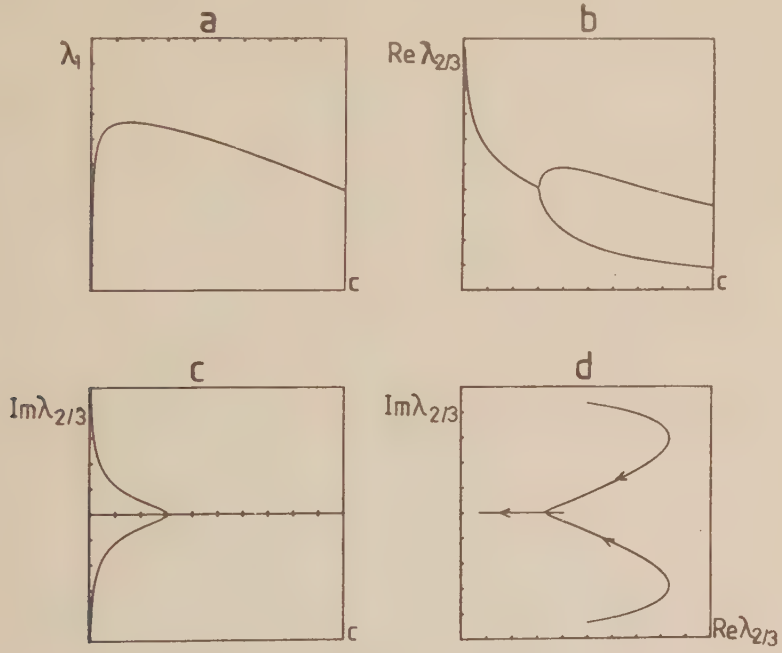


Abb. 2. Die Eigenwerte der dynamischen Matrix **B** als Funktion der Ausbreitungsgeschwindigkeit c.
Systemparameter: e = 15, μ = 100.
Achsen für (a), (b) und (c): c = 0 .. 20, λ_1 = -40 .. 0, Re $\lambda_{2/3}$ = 0 .. 10, Im $\lambda_{2/3}$ = -40 .. 40.
Achsen für (d): Re $\lambda_{2/3}$ = 0 .. 12, Im $\lambda_{2/3}$ = -40 .. 40.
Die Pfeile deuten die Richtung wachsender c-Werte an.

Nach der cartesischen Vorzeichenregel folgt, daß die charakteristische Gleichung (15) für $\mu>1$ (nur dieser Fall wird behandelt) stets eine negative reelle Wurzel (λ_1) sowie zwei positive reelle oder zwei konjugiert komplexe Wurzeln (λ_2, λ_3) besitzt. Im letzteren Fall ist $\mathrm{Re}\,\lambda_2 > 0$, was einfach bewiesen werden kann:

Die Linearfaktorzerlegung einer kubischen Gleichung ergibt

$$0 = (\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda-\lambda_2)\cdot(\lambda-\lambda_3)$$

$$0 = \lambda^3 - \lambda^2(2\mathrm{Re}\,\lambda_2 + \lambda_1) + \lambda(|\lambda_2|^2 + 2\lambda_1 \mathrm{Re}\,\lambda_2) - \lambda_1|\lambda_2|^2 \qquad (17)$$

Ein Koeffizientenvergleich mit (15) liefert für den λ-Term:

$$|\lambda_2|^2 + 2\lambda_1 \mathrm{Re}\,\lambda_2 = 1 - \mu < 0$$

und daraus

$$\mathrm{Re}\,\lambda_2 = \frac{1 - \mu - |\lambda_2|^2}{2\lambda_1} \qquad (18)$$

da $\mu>1$ und $\lambda_1<0$ ist, muß somit $\mathrm{Re}\,\lambda_2 > 0$ sein!

Weiterhin ergibt ein Koeffizientenvergleich von (15) und (17) für den λ^2-Term:

$$2\,\mathrm{Re}\,\lambda_2 = -\lambda_1 - \frac{c^2+1}{c}$$

da $c>0$ und $\lambda_1<0$ ist, folgt

$$2\,\mathrm{Re}\,\lambda_2 > |\lambda_1|$$

oder

$$\frac{|\lambda_1|}{\mathrm{Re}\,\lambda_2} > 2 \qquad (19)$$

Diese Relation wird später noch wichtig werden, da aufgrund von (19) das Modellsystem eine Voraussetzung des Shil'nikov Theorems [Shil 1965] ($|\lambda_1| > |\operatorname{Re}\lambda_2|$) erfüllt, wegen der "2" in (19) wird die Forderung sogar übererfüllt, aber damit können auch bestimmte dynamische Verhaltensmuster in diesem Modell grundsätzlich nicht mehr auftreten (siehe dazu die Diskussion in Abschnitt 5.3.2.3 und 5.4).

Nur der eben betrachtete Fall, mit konjugiert komplexen Eigenwerten, liefert die Möglichkeit eines komplizierten Systemverhaltens [Fe 1982; Ka,Rö 1983], weshalb auch nur er weiter untersucht werden soll. Dabei tritt allerdings eine kleine formale Schwierigkeit auf. Durch die komplexen Eigenwerte werden die Systemgleichungen scheinbar aus dem Phasenraum $\mathbb{R}^3$ in den größeren Raum $\mathbb{R}\times\mathbb{C}^2$ übertragen. Da jedoch der zweite und dritte Eigenwert und damit auch die dazu gehörigen Eigenvektoren konjugiert komplex sind, kann das Problem äquivalent in dem Raum $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ mit der Metrik $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{smallmatrix}\right)$ dargestellt werden.

Die Eigenvektoren $\mathbf{t}^i$ der dynamischen Matrix $\mathbf{B}$ lassen sich aus (9) einfach errechnen, wenn die Eigenwerte bekannt sind:

$$\mathbf{t}^i = \begin{pmatrix} 1 \\ e \\ \frac{e}{1+\lambda_i c} \\ \lambda_i \end{pmatrix} \qquad (20)$$

An dieser Stelle sollen die Eigenvektoren bewußt nicht normiert werden, da, wie sich im nächsten Kapitel zeigen wird, eine "1" in der ersten Komponente die Darstellung einfacher und transparenter macht.

Diese eben bestimmten Eigenvektoren bilden die Transformationsmatrix $\mathbf{H}$ (das Hauptsystem)

$$H := (t^1, t^2, t^3) \quad , \tag{21}$$

welche B diagonalisiert

$$\Lambda := H^{-1} B H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{22}$$

In der neuen, diagonalisierten (x,y,z)-Basis erhalten wir dann für die Zustandsvektoren:

$$l = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = H\, k \tag{23a}$$

oder

$$k = H^{-1} l \quad . \tag{23b}$$

Speziell die Steady States transformieren sich gemäß

$$\hat{L} = H \hat{K} \quad \text{bzw.} \quad \hat{K} = H^{-1} \hat{L} \tag{23c}$$

Nachdem die Eigenwerte und Eigenvektoren besimmt sind, soll nun die dynamische Grundgleichung des Systems in der diagonalisierten Basis formuliert werden. Zur Beschreibung der Teildynamiken in $\bar{T}$ bzw. $\tilde{T}$ empfiehlt sich dabei eine homogene Darstellung, bei der der Ursprung in den jeweiligen Steady State gelegt wird. Die dynamische Grundgleichung lautet in diesem Fall einfach

$$\boxed{k' = \Lambda k} \quad . \tag{24}$$

Beim Wechsel zwischen den Dynamiken ist dann jedoch auch ein Darstellungswechsel (Ursprungsverschiebung) zu berücksichtigen. Die Beschreibung dieses Darstellungswechsels wird den überwie-

genden Teil der vorliegenden Arbeit beanspruchen.

Für die Sprungbedingung (u=d), bei der sich der Wechsel zwischen den Teildynamiken vollzieht (vergl. Gl. 5), gilt in der homogenen, diagonalisierten Darstellung:

$$x + y + z = x + 2\,\mathrm{Re}\, y = d - \hat{U} =: \hat{\delta} \tag{25}$$

(Hier wird deutlich weshalb die Metrik des Raumes $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ eine "2" enthält.)

Schreiben wir weiter anstelle der komplexen Variable y

$$y =: \eta + i\xi \quad , \tag{26}$$

so lauten die Sprungbedingungen einfach:

$$\boxed{x + 2\eta = \hat{\delta}} \quad . \tag{27}$$

Damit kann nun in homogenen (x,y)-Koordinaten für die Trennebene

$$\mathbf{S} = \{(x,y)^T \,|\, \eta = \frac{\hat{\delta}-x}{2}\} \tag{28}$$

geschrieben werden. Dies bedeutet, daß in dieser Formulierung alle Punkte von $\mathbf{S}$ durch ihre x- und ξ-Werte charakterisiert werden können, η wird durch die Nebenbedingung in (28) als Funktion von x erhalten. In Zukunft sollen deshalb Punkte aus $\mathbf{S}$ in einem x-ξ-Koordinatensystem dargestellt werden.

Eine wesentliche Vereinfachung und Vereinheitlichung der Darstellung folgt aus der Tatsache, daß die Wellenvariable ϕ in (5) als zeitähnliche Größe erscheint; d.h., die Lage der Lö-

sungstrajektorien im Phasenraum wird durch eine "Zeitstreckung" nicht berührt, ebensowenig ändert sich dabei die Geometrie des Phasenraums. Dies motiviert die folgende Definition

$$\phi' := \phi \, \mathrm{Re}\, \lambda_2 \qquad (29a)$$

damit ist

$$\frac{d}{d\phi'} = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda_2} \frac{d}{d\phi} \quad . \qquad (29b)$$

Definieren wir weiter

$$w' := \frac{w}{\mathrm{Re}\ \lambda_2} \qquad (30)$$

und

$$\rho := \frac{|\lambda_2|}{\mathrm{Re}\ \lambda_2} \qquad (31a)$$

$$\omega := \frac{|\mathrm{Im}\,\lambda_2|}{|\mathrm{Re}\,\lambda_2|} \quad , \qquad (31b)$$

so erhalten wir für die ursprünglichen Koordinaten

$$\frac{d}{d\phi'} u = w' \qquad (32)$$

sowie

$$\frac{d}{d\phi'} x = -\rho x \qquad (33a)$$

$$\frac{d}{d\phi'} y = (1+i\omega) y \qquad (33b)$$

in der diagonalisierten Basis.

In Zukunft soll der Strich bei ϕ und w unterdrückt werden, da nur noch mit den gestrichenen Größen operiert wird.

Mit der hier beschriebenen (im Parameterraum) lokalen Eichung können die drei komplexen Eigenwerte durch zwei reelle Zahlen (ρ,ω) ersetzt werden. Diese beiden Parameter enthalten im Bezug auf den geometrischen Verlauf der Lösungstrajektorien die gleiche Information wie die drei Eigenwerte.

Die hier für das Modellsystem gefundenen Eigenschaften sollen von nun an axiomatisch für die zu untersuchende Systemklasse gefordert werden:

SY1: Das System besitzt einen realen und einen virtuellen Steady State.

SY2: Beide Steady States sind Sattelfoci und haben die gleichen Eigenwerte.

2 Darstellung des Problems

Das vorgestellte Modellsystem ist ein Repräsentant der Systemklasse $(C^0,1)$ und zeigt damit in seinem dynamischen Verhalten einen Ausschnitt aus der Vielfalt von Verhaltensmustern, die die Klasse realisieren kann. Ein System, das in einem noch zu definierenden Sinne alle möglichen Verhaltensmuster zeigt, wird als Universalsystem bezeichnet. Jeder Repräsentant der Klasse ist dann, im erwähnten Sinne, äquivalent zu einer Einschränkung des Universalsystems auf eine Teilmenge (die nicht zusammenhängend sein muß) seines Parameterraums. Dabei sind zwei Systeme dann äquivalent, wenn ihre Lösungstrajektorien in einer diagonalisierten Darstellung kongruent sind, also durch einen nichtsingulären, linearen Automorphismus ineinander überführt werden können.

2.1 Halbabbildungen

Alle stückweise linearen Differentialgleichungen besitzen den großen Vorteil, daß jede Teildynamik für sich geschlossen lösbar ist. Für die behandelte Systemklasse bedeutet dies konkret, daß bei einer beliebigen Anfangsbedingung $(\bar{\alpha},\bar{\beta})\in\overline{T}$ die Lösung die folgende Form hat:

und

$$x(\phi) = \bar{\alpha}\exp(-\rho\phi)$$
$$y(\phi) = \bar{\beta}\exp((1+i\omega)\phi) \quad . \tag{1}$$

Dies gilt, solange die Lösungstrajektorie im Innern von $\overline{T}$ bleibt. Wird bei $\phi=\tau$ die Sprungbedingung (1.27) erfüllt, so tritt, wie oben beschrieben, ein Wechsel in der Dynamik auf; das Systemverhalten unterliegt nun der zweiten Teildynamik mit der Anfangsbedingung

und

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= x(\tau) + (\bar{X}-\tilde{X}) \\ \tilde{\beta} &= y(\tau) + (\bar{Y}-\tilde{Y}) \end{aligned} \quad . \tag{2}$$

Dabei ist die funktionale Gestalt der Lösung in homogenen Koordinaten wieder durch (1) gegeben. Falls die Trajektorie nach einem endlichen ϕ-Intervall wiederum die Sprungbedingung erfüllt, bestimmt erneut die erste Teildynamik das Systemverhalten, etc. Daraus wird klar, daß die gesamte Lösungstrajektorie bekannt ist, wenn die jeweiligen Anfangsbedingungen der Teildynamiken, also die Durchtrittspunkte der Trajektorie durch die Trennebene S bestimmt werden können.

Aus der Gestalt des Flusses durch S ergibt sich eine natürliche Unterteilung derselben in zwei Halbebenen

und

$$\begin{aligned} S^+ &:= \{(u,v,w)^T \,|\, u=d, w>0\} \\ S^- &:= \{(u,v,w)^T \,|\, u=d, w<0\} \end{aligned} \tag{3}$$

wobei in S^+ die Trajektorien von $\bar{T}$ nach $\tilde{T}$ überwechseln und in S^- in umgekehrter Richtung. Die beiden Halbebenen S^+ und S^- werden durch die Gerade W

$$W := \{(u,v,w)^T \,|\, u=d, w=0\} \tag{4}$$

getrennt. Diese hat in (x,ξ)-Koordinaten die Form

$$\xi = \frac{\hat{\delta} - (\rho+1)x}{2\omega} \quad , \tag{5}$$

wie durch Einsetzen der Sprungbedingung (1.27) in

$$0 = w = -\rho x + 2\mathrm{Re}\left[(1+i\,\omega)(\eta+i\,\xi)\right] \tag{6}$$

nachgerechnet werden kann.

Damit lassen sich zwei Halbabbildungen [Ue,Rö 1983] in S definieren:

$$\bar{P} : S^- \to S^+, \ (x,\xi) \mapsto \bar{P}(x,\xi) \tag{7a}$$

und

$$\tilde{P} : S^+ \to S^-, \ (x,\xi) \mapsto \tilde{P}(x,\xi) \tag{7b}$$

Die vollständige Poincaré Abbildung P ist die Komposition von $\bar{P}$ und $\tilde{P}$

$$P = \tilde{P} \circ \bar{P} : S^- \to S^-, \ (x,\xi) \mapsto P(x,\xi) = \tilde{P}(\bar{P}(x,\xi)) \quad . \tag{8}$$

Konkret wird eine Halbabbildung $\hat{P}$ durch die Gleichungen

und

$$x \cdot e^{-\rho\tau} + 2\mathrm{Re}\left[(\eta(x)+i\xi)\cdot e^{(1+i\omega)\tau}\right] = \hat{\delta} \tag{9a}$$

$$\hat{\delta}(x \cdot e^{-\rho\phi} + 2\mathrm{Re}\left[(\eta(x)+i\xi)\cdot e^{(1+i\omega)\phi}\right]) < \hat{\delta}\hat{\delta} \quad , \ 0<\phi<\tau \tag{9b}$$

beschrieben. Dabei ist $\eta(x)$ durch die Sprungbedingung (1.27) festgelegt

$$\eta(x) = \frac{\hat{\delta}-x}{2} \quad . \tag{10}$$

Die Gleichung (9a) ist die implizite Bedingung dafür, daß nach der "Zeit" τ die Sprungbedingung wieder erfüllt wird, und (9b) garantiert, daß τ das kleinste ϕ ist, welches (9a) erfüllt.

Das wesentliche Problem bei der Konstruktion von Halbabbildungen ist demnach, jeweils die erste Nullstelle von (9a) in $\mathbb{R}^+$ zu finden. Leider ist diese implizite Gleichung global in geschlossener Form nicht lösbar. Für eine Reihe ausgezeichneter

Punkte und Kurven lassen sich die impliziten Halbabbildungen jedoch explizit formulieren.

2.2 Der kanonische Parameterraum

Betrachten wir die Gleichungen (9), welche die Halbabbildungen charakterisieren, so enthalten diese nur noch 4 Parameter, nämlich ρ, ω, $\bar{\delta}$ und $\tilde{\delta}$; für den Darstellungswechsel zwischen den Teildynamiken wird ein weiterer Vektor $\Delta := \bar{L} - \tilde{L}$ benötigt, wovon allerdings die erste und dritte Komponente bereits bekannt sind:

und

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \bar{U} - \tilde{U} = \bar{\delta} - \tilde{\delta} \\ \Delta_3 &= \bar{W} - \tilde{W} = 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

Mit diesen Parametern kann das System vollständig beschrieben werden, denn jede der beiden Teildynamiken wird durch den Abstand ihres Steady State von S sowie durch die Relaxationskonstante in Richtung des 1. Eigenvektors und die Kreisfrequenz des focalen Anteils der Dynamik beschrieben. Die Kopplung zwischen den Teilsystemen erfolgt rein geometrisch über den Differenzvektor Δ zwischen den Steady States.

Das Gesamtsystem besitzt nun noch zwei Freiheitsgrade: (1) eine beliebige Verschiebung in v-Richtung und (2) den oben beschriebenen Eichfreiheitsgrad für die "Geschwindigkeit", mit der die Lösungstrajektorien durchlaufen werden. Alle Repräsentanten der behandelten Systemklasse, die sich höchstens in diesen beiden Freiheitsgraden unterscheiden, sollen als äquivalent betrachtet werden, da sie, bis auf Parallelverschiebung, identische Poincaré Abbildungen besitzen.

Damit ist es nun möglich, jedes beliebige System der zu behandelnden Klasse durch lediglich fünf skalare Parameter (ρ, ω, $\bar{\delta}$, $\tilde{\delta}$, Δ_2) zu charakterisieren. Die ersten vier Größen sind dabei aus $\mathbb{R}^+$ und $\Delta_2 \in \mathbb{R}$. Das direkte Produkt dieser Mengen $(\mathbb{R}^+)^4 \times \mathbb{R}$ ist zwar kein linearer Raum, soll aber dennoch im fol-

genden als der "kanonische Parameterraum" bezeichnet werden.

Alle Repräsentanten dieser Systemklasse, so unterschiedlich sie auch erscheinen mögen, zeigen, wenn sie in den fünf kanonischen Parametern übereinstimmen, exakt dasselbe dynamische Verhalten (modulo der oben beschriebenen Freiheitsgrade). Dies bedeutet, daß ein Punkt im kanonischen Parameterraum die Lösungen einer Äquivalenzklasse von Systemen bestimmt.

Der Parameterraum eines Universalsystems ist nun gerade der gesamte kanonische Parameterraum und die einzelnen Systeme der Klasse überdecken mehr oder minder große Teilmengen davon (vergl. dazu die Darstellung des Spektrums von **B** in Abb. 1.2). Damit ergibt sich die Möglichkeit, nach einer entsprechenden Kartierung des kanonischen Parameterraums, die Vielfalt der dynamischen Verhaltensmuster eines Systems allein anhand der von diesem System realisierbaren Parameter vorherzusagen.

3 Das unendlich steife System ($\rho \to \infty$)

Bevor wir uns den Halbabbildungen $\bar{P}$ und $\tilde{P}$ in ihrer allgemeinen Form zuwenden, soll hier zunächst ein Extremfall untersucht werden, die Situation für $\rho \to \infty$. In diesem Fall relaxiert das System augenblicklich in x-Richtung, die verbleibende Bewegung wird dann nur noch vom focalen Anteil der Dynamik bestimmt. Somit reduziert sich die Sprungbedingung (1.27) zu

$$2\eta = \hat{\delta} \tag{1}$$

Dies legt die folgende Definition nahe

$$\hat{\eta}_\infty := \frac{\hat{\delta}}{2} \tag{2}$$

$\hat{\eta}_\infty$ ist für $x=0$ $(\phi=\infty)$, unabhängig von ρ , der Realteil von y, welcher die Lage von S in der jeweiligen Darstellung festlegt. In diesem Spezialfall vereinfacht sich die Gleichung (2.9), welche die Halbabbildungen charakterisiert, zu

$$\mathrm{Re}\left[(\hat{\eta}_\infty + i\,\xi)\cdot e^{(1+i\omega)\tau}\right] = \hat{\eta}_\infty \tag{3a}$$

und

$$\hat{\sigma}\,\mathrm{Re}\left[(\hat{\eta}_\infty + i\,\xi)\cdot e^{(1+i\omega)\phi}\right] < \hat{\sigma}\hat{\eta}_\infty \quad , \quad 0<\phi<\tau \; . \tag{3b}$$

Eine formale Vereinfachung kann mit Hilfe einer geeigneten Phasenwahl (eine Verschiebung um $-\arg(\hat{\eta}_\infty + i\,\xi)$ liefert eine reelle Startamplitude) und einer räumlichen Streckung (um den Faktor $1/\hat{\eta}_\infty$) erreicht werden. Aus (3a) wird dann einfach

$$\mathrm{Re}\; z(\tau) = 1 \quad , \tag{4}$$

wobei

$$z(\phi) := a\cdot e^{(1+i\omega)\phi} \quad , \quad a \in \mathbb{R}^+ \tag{5}$$

ist. Es handelt sich hier um das Problem des Schnitts einer logarithmischen Spirale mit einer Geraden (Π), die im Abstand 1 parallel zur imaginären Achse verläuft. Auch dieses Problem ist nicht geschlossen lösbar, läßt sich aber weiter analysieren (s. die nächsten Abschnitte).

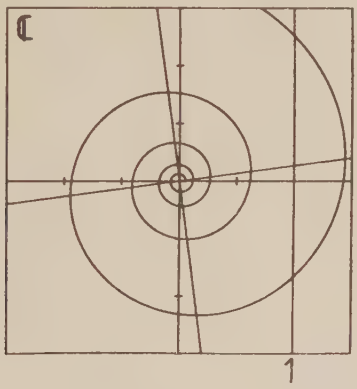


Abb. 1. Schnitt einer logarithmischen Spirale mit einer Geraden parallel zur imaginären Achse. Die Ortskurven der Extrema vom Real- und Imaginär-Teil der Spirale sind Geraden, die um $\arctan 1/\omega$ gegenüber den Achsen gedreht wurden. Parameter: $a = 0.1$, $\omega = 7.5$.

3.1 Die Extrema der Spirale

Betrachten wir im ersten Schritt die Extrema des Realteils der Funktion z. Die Bedingung für das Auftreten eines solchen Extremums an der Stelle ϕ_0 lautet:

$$\frac{d}{d\phi} \operatorname{Re} z(\phi_0) = 0 \quad . \tag{6}$$

Einsetzen der Definitionsgleichung (5) in diese Bedingungsgleichung führt auf

$$a \cdot \exp(\phi_0) \cdot (\cos\omega\phi_0 - \omega \sin\omega\phi_0) = 0$$

$$\boxed{\phi_0 = \frac{1}{\omega} \arctan\frac{1}{\omega} \bmod \frac{\pi}{\omega}} \tag{7}$$

Dies zeigt, daß bei einer Spirale die Phase der Extrema gegenüber dem Kreis um $\arctan(1/\omega)$ verschoben ist, und zwar unabhängig von der Startamplitude und vom aktuellen Radius der Spirale. Dabei liegen die Phasen der Maxima des Realteils von z im Intervall $(0,\pi/2)$, während die Phasen der Minima aus $(\pi,3\pi/2)$ sind.

Die Ortskurve der Extrema des Imaginärteils von z, der hier nicht behandelt werden soll, läßt sich analog bestimmen. Hier handelt es sich um eine Gerade, die um $\arctan 1/\omega$ gegenüber der imaginären Achse gedreht liegt.

Bilden wir zu einer vorgegebenen Startamplitude $a \varepsilon (0,1)$ die Folge der Maxima des Realteils von $z(\phi)$

$$Z_n := \mathrm{Re}\, z(\phi_0 + 2n\tfrac{\pi}{\omega}) \quad , \; n=0,1,2\ldots \; , \qquad (8)$$

so wächst diese Folge streng monoton. Sei n_0 das kleinste n, für das $Z_n > 1$ erfüllt ist, dann liegt der erste Schnitt der Spirale mit der Geraden offensichtlich in dem ϕ-Intervall $((2n_0-1/2)\pi/\omega, \phi_0+2n_0\,\pi/\omega)$, da $\mathrm{Re}\, z((2n_0-1/2)\pi/\omega)=0$ und nach Voraussetzung $\mathrm{Re}\, z(\phi_0+2n_0\pi/\omega)=Z_n>1$ ist. Nur dieses Intervall ist von Interesse für den gesuchten ersten Schnitt der Spirale mit der Geraden, deshalb sei:

$$a' := a\cdot\exp(2n_0\tfrac{\pi}{\omega}) \qquad (9a)$$

und

$$\phi' := \phi + 2n_0\tfrac{\pi}{\omega} \qquad (9b)$$

In diesen gestrichenen Variablen liegt nun der erste Schnitt der Spirale mit der Geraden Π im ϕ-Intervall $(-\pi/2\,\omega, \phi_0)$. Da nur diese gestrichenen Größen in Zukunft noch verwendet werden, sollen die Striche von nun an entfallen.

3.2 Ein Fixpunktsatz

Nachdem die Lage des gesuchten ersten Schnittpunktes der Spirale mit der Geraden Π auf ein relativ kleines Intervall eingegrenzt wurde, soll nun eine Prozedur zum konkreten Auffinden der Lösungen der transzendenten Gleichung (4) vorgestellt werden. Dabei muß es sich um ein Näherungsverfahren handeln, das eine numerische Auswertung des Problems erlaubt.

Der aktuelle Radius der Spirale ist der Betrag von z. Als Funktion von ϕ auf dem Intervall $(-\pi/2\omega, \pi/2\omega)$ stellt sich dies folgendermaßen dar:

$$R: \left(\frac{-\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}\right) \to \left(a \cdot e^{-\pi/2\omega}, a \cdot e^{\pi/2\omega}\right), \quad \phi \mapsto R(\phi) = |z(\phi)| \tag{10}$$

$R(\phi)$ hat dabei die Form

$$R(\phi) = a \cdot e^{\phi}$$

Diese Abbildung ist umkehrbar, d.h., sie kann nach ϕ aufgelöst werden.

$$\phi = \ln \frac{R}{a} \tag{11}$$

Mit dem Radius ist also auch die Phase der Spirale eindeutig festgelegt.

Da der Schnitt der Spirale mit Π nicht explizit bestimmt werden kann, soll hier ein Fixpunktverfahren benutzt werden, welches die Lösung des Problems auf eine wiederholte Lösung des Schnitts eines Kreises mit der Geraden zurückführt.

Zu diesem Zweck definieren wir uns die folgenden zwei Automorphismen auf einem Intervall:

$$F^+ : (1, a\cdot e^{\pi/2\omega}) \to (1, a\cdot e^{\pi/2\omega}),\ R \mapsto F^+(R) \tag{12a}$$

und, falls $a>1$ ist,

$$F^- : (1, a] \to (1, a],\ R \mapsto F^-(R) \tag{12b}$$

Die konkrete Darstellung dieser Funktionen lautet:

$$F^{\pm}(R) = a\cdot\exp\left(\pm\frac{1}{\omega}\arctan\sqrt{R^2-1}\right) \tag{13}$$

Zur Konstruktion der Abbildungen $F^{\pm}$ wird zunächst die Phase bestimmt, bei der ein Kreis mit dem Radius R die Gerade schneidet, bei dieser Phase wird dann der neue Spiralradius $F^{\pm}(R)$ ermittelt.

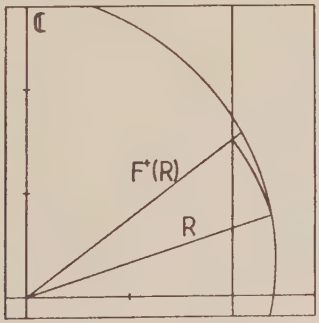


Abb. 2. Beispiel für die Konstruktion von $F^+(R)$.

Den Zusammenhang zwischen dem Problem des Schnitts der Spirale mit einer Geraden parallel zur imaginären Achse und den Eigenschaften der Abbildungen $F^{\pm}$ stellt der folgende Satz her.

Satz 1

Sei $\bar{R}$ ein Fixpunkt von F^{+} oder F^{-}, so ist $\mathrm{Re}\, z(\bar{R})=1$ und umgekehrt.

Beweis

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen.
(a) sei $\bar{R}$ Fixpunkt von $F^{\pm}$, so ist $F^{\pm}(\bar{R})=\bar{R}$ und damit wird mit Hilfe von (11)

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\, z(\bar{R}) &= \bar{R}\cos(\omega \ln\frac{\bar{R}}{a}) \\ &= \bar{R}\cos\left(\frac{\pm\omega}{\omega\left|\arctan\sqrt{\bar{R}^2-1}\right|}\right) \\ &= \frac{\bar{R}}{\sqrt{1+\bar{R}^2-1}} \\ &= 1\end{aligned}$$

(b) sei nun $\mathrm{Re}\, z(\bar{R})=1$, dann ist nach (11) $\bar{R}=1/\cos(\omega \ln(\bar{R}/a))$, somit wird

$$\begin{aligned}F^{\pm}(\bar{R}) &= a\cdot\exp\left(\pm\frac{1}{\omega}\left|\arctan\sqrt{\frac{1-\cos^2(\omega\ln\frac{\bar{R}}{a})}{\cos^2(\omega\ln\frac{\bar{R}}{a})}}\right|\right) \\ &= a\cdot\exp(\pm\left|\ln\frac{\bar{R}}{a}\right|) \\ &= \bar{R}\end{aligned}$$

***

Dabei ist zu beachten, daß die Abbildung F^+ im Bereich positiver Phasen ($\omega\phi > 0$) und die Abbildung F^- im Bereich negativer Phasen definiert ist. Wie viele Fixpunkte die beiden Abbildungen besitzen und welcher dieser Fixpunkte eine Lösung der Sprungbedingung (2.9a) ist, besagt der folgende

Satz 2

Sei $\mathrm{Re}\, z(\phi_0) > 1$, so existieren im Intervall $(-\pi/2\omega, \pi/2\omega)$ zwei Lösungen von Gleichung (4). Ist $a>1$, so liegt je eine Lösung in den Intervallen $(-\pi/2\omega, 0]$ und $(\phi_0, \pi/2\omega)$. Für $a<1$ liegt eine der beiden Lösungen im Intervall $(0, \phi_0)$ und eine im Intervall $(\phi_0, \pi/2\omega)$.

Beweis

Die erste Aussage ist eine einfache Folgerung aus dem Zwischenwertsatz, denn $\mathrm{Re}\, z(-\pi/2\omega) = \mathrm{Re}\, z(\pi/2\omega) = 0$ und $\mathrm{Re}\, z(\phi_0) > 1$. Da die Funktion $\mathrm{Re}\, z$ stetig differenzierbar ist und, wie aus (8) folgt, im Intervall $(-\pi/2\omega, \pi/2\omega)$ nur ein Extremum (Maximum) bei ϕ_0 besitzt, ist $\mathrm{Re}\, z$ in $(-\pi/2\omega, \phi_0)$ streng monoton steigend und nimmt in diesem Intervall genau einmal den Wert "1" an. Mit der gleichen Argumentation folgt, daß $\mathrm{Re}\, z$ im Intervall $(\phi_0, \pi/2\omega)$ streng monoton fallend ist und auch dort genau einmal den Wert "1" annimmt. Damit ist der Existenzteil des Satzes bewiesen.

Der zweite Teil des Beweises folgt aus dem ersten. Danach liegt die zweite Lösung im Intervall $(\phi_0, \pi/2\omega)$. Zur Lokalisierung der ersten Lösung unterteilen wir das Intervall $(-\pi/2\omega, \phi_0)$ in zwei Teilintervalle: $I_1 := (-\pi/2\omega, 0]$ und $I_2 := (0, \phi_0)$. Auf diesen Teilintervallen nimmt (wegen der Monotonie) $\mathrm{Re}\, z$ Werte aus $(0, a]$ und $(a, \mathrm{Re}\, z(\phi_0))$ an. Ist $a>1$, so liegt nach dem Zwischenwertsatz die erste Lösung in I_1, ist $a=1$, so ist trivialerweise $\tau = 0$ und ist $a<1$, so muß, wiederum nach dem Zwischenwertsatz, diese Lösung in I_2 gesucht werden. ***

Damit ist bewiesen, daß im Intervall $(-\pi/2\omega, \phi_0)$ die erste Lösung der Sprungbedingung liegt, diese ist für $a \geq 1$ ein Fixpunkt der Abbildung F^- und für $a<1$ ein solcher von F^+.

3.2.1 Die Stabilität der Fixpunkte

Die Stabilität eines Fixpunktes der Abbildungen $F^\pm$ wird in linearer Näherung durch den Betrag der Ableitung am Fixpunkt $\bar{R}$ bestimmt. Hier lautet das Stabilitätskriterium

$$\left| \frac{d}{dR} F^\pm(\bar{R}) \right| < 1 \tag{14}$$

Berechnen wir dazu die Ableitungen von F^+ und F^-:

$$\frac{d}{dR} F^\pm(R) = \pm \frac{F^\pm(R)}{G(R)} \tag{15}$$

mit

$$G(R) = \omega R \sqrt{R^2-1} \tag{16}$$

Wird die Ableitung an der Stelle des Fixpunktes $\bar{R}$ in die Stabiltitätsbedingung (14) eingesetzt, so ergibt dies

$$\frac{\bar{R}}{\omega \bar{R} \sqrt{\bar{R}^2-1}} < 1$$

$$\bar{R}^2 > \frac{\omega^2+1}{\omega^2} \tag{17}$$

Diese Stabilitätsbedingung gilt für F^+ und F^- gleichermaßen, liefert aber kein unmittelbares Kriterium, da $\bar{R}$ selbst nicht bekannt ist. Um dennoch eine Stabilitätsaussage zu ermöglichen, soll der Bereich untersucht werden, in dem $|dF^\pm/dR|<1$ ist, d.h., der Bereich, in dem $G > F^\pm$ ist. Die Grenze dieses "Stabilitätsbereichs" liegt bei $\tilde{R}$, wobei

$$\frac{d}{dR} F^{\pm}(\tilde{R}) = 1$$

oder

$$F^{\pm}(\tilde{R}) = G(\tilde{R}) \tag{18}$$

ist. Auch Gleichung (18) ist für beliebige Werte der Startamplitude a nicht geschlossen lösbar, deshalb soll $\tilde{R}$ durch einen weiteren Punkt $\hat{R}$, den Fixpunkt der Nennerfunktion G abgeschätzt werden.

$$G(\hat{R}) = \hat{R} \tag{19}$$

Diese Gleichung besitzt in $\mathbb{R}^+$ genau eine Lösung

$$\hat{R} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\omega^2+1} \tag{20}$$

Damit lautet die Stabilitätsbedingung (17) einfach

$$\bar{R} > \hat{R} \quad . \tag{21}$$

Diese Bedingung kann nun relativ leicht überprüft werden, da die Funktionen $F^{\pm}$ monoton sind . Betrachten wir zunächst F^{-}. Diese Abbildung ist nur definiert falls $a>1$ ist und besitzt dann (nach Satz 2) genau einen Fixpunkt.

Satz 3

Sei $\mathrm{Re}\, z(\phi_0)>1$ und $a>1$, so ist der Fixpunkt von F^{-} genau dann linear stabil, wenn die Bedingung

$$F^{-}(\hat{R}) > \hat{R} \tag{22}$$

erfüllt ist.

Beweis

Nach Satz 2 existiert genau ein Fixpunkt von F^- im Intervall $(1,a]$. Da $F^-(1)=a\geq 1$ und (nach Voraussetzung) $F^-(\hat{R})>\hat{R}$ ist, folgt wegen der Monotonie von F^- (vergl. Gl. 13), daß für alle $R\in[1,\hat{R}]$ $F^-(R)>R$ gilt. Damit kann der Fixpunkt nicht in $(a,\hat{R}]$ liegen und ist somit aus dem Intervall $(\hat{R},a]$, was ihn nach (21) stabil macht. ***

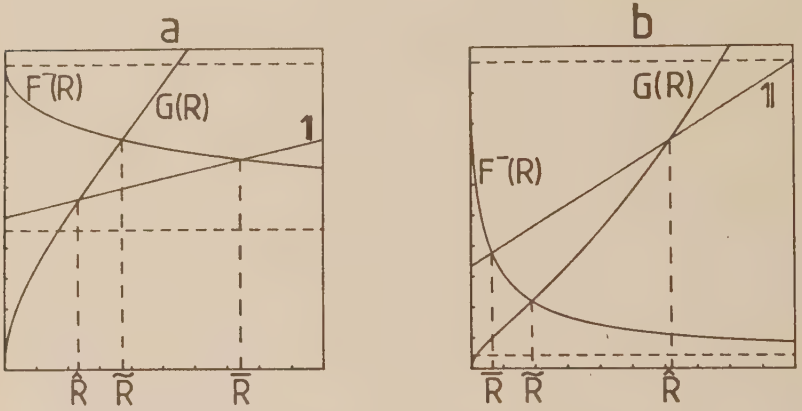


Abb. 3. Zur Stabilität des Fixpunkts von F^-.
(a) $\bar{R} > \tilde{R} > \hat{R}$, somit ist der Fixpunkt stabil.
Parameter: $a = 2$, $\omega = 2$.
(b) Hier ist $\bar{R} < \tilde{R} < \hat{R}$, was den Fixpunkt instabil macht.
Parameter: $a = 3$, $\omega = 0.5$.

Mit diesem Resultat kann die Stabilitätsbedingung für F^- nun folgendermaßen formuliert werden:

$$F^-(\hat{R}) = a\cdot\exp(-\phi_0) > \frac{1}{\omega}\sqrt{\omega^2+1} \qquad (23)$$

In Falle der Funktion F^+ ist die Situation noch einfacher, da

$$F^+(\hat{R}) = a \cdot \exp(\phi_0) = |z(\phi_0)| \qquad (24)$$

ist, also gerade der Spiralradius beim Maximum des Realteils von z wird.

Satz 4

Sei $\mathrm{Re}\, z(\phi_0) > 1$, so besitzt F^+ einen (linear) instabilen und einen (linear) stabilen Fixpunkt ($\bar{R}_1$ und $\bar{R}_2$), falls $a<1$ ist. F^+ besitzt lediglich einen (linear) stabilen Fixpunkt ($\bar{R}_2$), falls $a \geq 1$ ist.

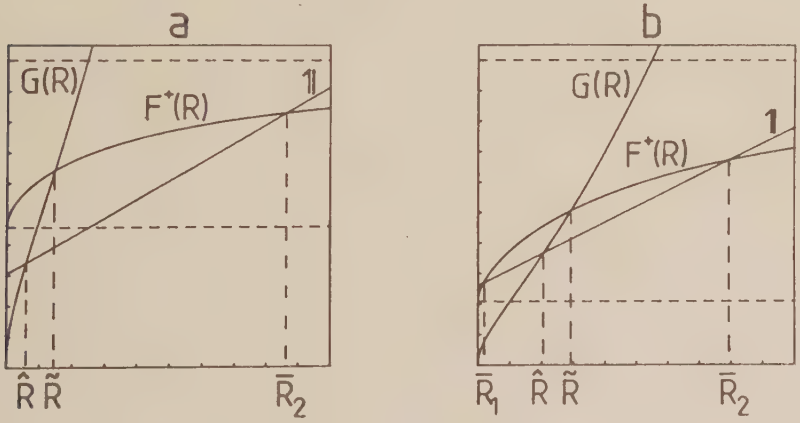


Abb. 4. Zur Stabilität der Fixpunkte von F^+.
(a) $a > 1$, somit existiert nur der zweite Fixpunkt $\bar{R}_2$, der auch stabil ist.
Parameter: $a = 1.5$, $\omega = 1$.
(b) $a < 1$, also existieren zwei Fixpunkte, wobei $\bar{R}_1$ instabil und $\bar{R}_2$ stabil ist.
Parameter: $a = 0.8$, $\omega = 1$.

Beweis

Beide Aussagen sind einfache Konsequenzen von Satz 1 und 2 sowie Gleichung (24).

Überträgt man die Aussage von Satz 2 via (11) auf den Definitionsbereich von F^+, so lautet diese: Für $a \geq 1$ besitzt die Funktion F^+ im Intervall $(\hat{R}, a \cdot e^{\pi/2\omega})$ ihren einzigen Fixpunkt, für $a<1$ besitzt F^+ je einen Fixpunkt in den Intervallen $(1,\hat{R})$ und $(\hat{R}, ae^{\pi/2\omega})$. Damit ist der Existenzteil des Satzes bewiesen.

Die Stabilitätsaussage folgt nun unmittelbar aus der Lage der Fixpunkte unter Ausnutzung von (21). $\bar{R}_2$ ist aus $(\hat{R}, a \cdot e^{\pi/2\omega})$ und damit immer größer als $\hat{R}$ also ist dieser nach (21) ein stabiler Fixpunkt. $\bar{R}_1$ ist, falls er existiert, aus $(1,\hat{R})$ und somit immer kleiner als $\hat{R}$ was ihn zu einem instabilen Fixpunkt macht. ***

Mit diesen Resultaten kann nun im konkreten Fall entschieden werden, ob das vorgestellte Fixpunktverfahren den gesuchten ersten Schnittpunkt einer Spirale mit der Geraden Π liefert. Dieses Verfahren, falls es konvergiert, hat den Vorteil, daß die Punkte $R=a$ für F^- und $|z(\phi_0)|$ für F^+ universelle Startpunkte sind und damit keine Probleme mit dem Konvergenzradius entstehen.

Betrachten wir nun noch zwei Grenzfälle, bei denen die lineare Stabilitätsanalyse ein indifferentes, also kein Ergebnis liefert. Zunächst seien die Kenngrößen der Spirale folgendermaßen verknüpft:

$$a = a_c := \frac{1}{\omega}\sqrt{\omega^2+1} \cdot \exp(\phi_0) \quad . \tag{25}$$

Für dieses a_c ist die Bedingung (23) gerade nicht mehr erfüllt, denn in diesem Fall ist $\bar{R}=\tilde{R}=\hat{R}$, also $F^-(\hat{R})=1$. Die zweite Ableitung von F^- an der Stelle $\hat{R}$ hat den Wert

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dR^2} F^-(\hat{R}) &= \frac{G(\hat{R})F^{-\prime\prime}(\hat{R}) - G'(\hat{R})F^-(\hat{R})}{G(\hat{R})^3} \\ &= \frac{F^-(\hat{R})}{G(\hat{R})^2}\,(1 + G(\hat{R})) \\ &= \frac{1}{\hat{R}}\,(1 + \frac{2\hat{R}^2-1}{\sqrt{\hat{R}^2-1}}) \\ &= \frac{\omega}{\omega^2+1}\,(\omega^2+3) \qquad ; \qquad (26)\end{aligned}$$

damit kann F^- um $\hat{R}$ bis zur quadratischen Ordnung entwickelt werden.

$$F^-(\hat{R}+\varepsilon) = \hat{R} - \varepsilon + \frac{\omega}{\omega^2+1}\,(\omega^2+3)\,\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \qquad (27)$$

Für R-Werte, die größer als $\hat{R}$ sind ($\varepsilon>0$), ist der Fixpunkt anziehend, da $|F^-(\hat{R}+\varepsilon)-F(R)|<\varepsilon$ ist. Dagegen wirkt er für ε-Werte die kleiner als 0 sind abstoßend, hier ist $|F^-(\hat{R}+\varepsilon)-F^-(\hat{R})|>|\varepsilon|$.

Der zweite Grenzfall liegt dann vor, wenn das Maximum des Realteils der Spirale gerade den Wert 1 annimmt. Dann ist

$$\mathrm{Re}\; z(\phi_0) = 1$$

und damit

$$a = a_b := \exp(-\phi_0)\,\frac{1}{\cos\omega\phi_0} \qquad (28)$$

In dieser Situation fallen der (linear) stabile und der (linear) instabile Fixpunkt von F^+ zusammen, also gilt auch hier $\bar{R}_1=\hat{R}=\tilde{R}=\bar{R}_2$. Wieder liefert die zweite Ableitung ein Resultat, das

nicht identisch verschwindet:

$$\frac{d^2}{dR^2} F^+(\hat{R}) = \frac{F^+(\hat{R})}{G(\hat{R})^2} (1 - G(\hat{R}))$$

$$= -\omega \sqrt{\omega^2+1} \qquad (29)$$

Hier ergibt eine Entwicklung bis zur zweiten Ordnung:

$$F^+(\hat{R}+\varepsilon) = \hat{R} + \varepsilon - \omega \sqrt{\omega^2+1}\, \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \qquad (30)$$

Somit ist auch dieser Fixpunkt einseitig stabil, er wirkt ebenfalls auf R-Werte, die kleiner als $\hat{R}$ sind, repellierend, während er für größere Werte attraktiv ist.

Zusammen mit den beiden eben besprochenen Grenzsituationen, die explizit angegeben werden können, stellt sich das folgende Bild im Parameterraum der Spirale dar:

a) Ist $a<a_b$, so besitzt die Spirale im ϕ-Intervall $(-\pi/2\omega, \pi/2\omega)$ keinen Schnitt mit der Geraden Π.

b) Ist $a=a_b$, so berührt die Spirale die Gerade Π bei $\phi = \phi_0$. Der Berührpunkt ist dann ein einseitig stabiler Fixpunkt von F^+.

c) Ist $a\varepsilon(a_b,1)$, so besitzt die Spirale zwei Schnittpunkte mit der Geraden, beide haben einen positiven Imaginärteil und sind somit Fixpunkte von F^+. Der Eintrittspunkt in die Halbebene $\mathrm{Re}\, z>1$ ist dabei ein instabiler Fixpunkt von F^+, während der Austrittspunkt ein stabiler Fixpunkt ist.

d) Ist $a=1$, so schneidet die Spirale die Gerade zum ersten Mal bei $\phi = 0$. Der zweite Schnittpunkt liegt im Intervall $(\phi_0, \pi/2\omega)$ und ist ein stabiler Fixpunkt von F^+.

e) Ist $a \in (1, a_c)$, so schneidet die Spirale die Gerade einmal mit negativem und einmal mit positivem Imaginärteil. Der erste Schnitt ist dabei ein instabiler Fixpunkt von F^-, der zweite Schnitt ist ein stabiler Fixpunkt von F^+.

f) Ist $a = a_c$, so ist der erste Schnittpunkt ein einseitig stabiler Fixpunkt von F^-.

g) Ist $a > a_c$, so sind beide Schnittpunkte stabile Fixpunkte von F^+ bzw. F^-.

3.3 Die Eigenschaften des reduzierten Systems

Der in diesem Kapitel behandelte "unendlich steife Fall" führt im wesentlichen auf ein zweidimensionales System. Dies folgt aus der Tatsache, daß sich die beiden Teildynamiken lediglich in ihren Inhomogenitäten unterscheiden und somit beim Wechsel zwischen den beiden Dynamiken die x- und y-Komponente nicht mischen. Die Behandlung des dynamischen Verhaltens erfolgt in diesem Fall weitgehend analog zur Dikussion des "lokalen Systems" in [Ka,Rö 1983] und soll deshalb hier nicht auch nicht durchgeführt werden.

Auf eine Eigenschaft des zweidimensionalen Systems soll hier jedoch noch kurz eingegangen werden, da es sich dabei um eine wichtige Voraussetzung für das Auftreten chaotischer Lösungen im vollen dreidimensionalen Fall handelt. Es ist dies die Möglichkeit einer Teildynamik, benachbarte Trajektorien zu trennen, d.h., Lösungen mit nahe beieinander liegenden Anfangsbedingungen auseinander laufen zu lassen [Ru 1979].

Wie im letzten Abschnitt gezeigt wurde, berührt eine Spirale mit der Amplitude $a=a_b$ die Gerade Π, die im Abstand 1 parallel zur imaginären Achse verläuft. Diese ausgezeichnete Trajektorie erfüllt also die Sprungbedingung, ohne jedoch an dieser Stelle nach $\bar{T}$ überzuwechseln. Betrachten wir nun zwei Spiralen mit den Amplituden $a_b+\varepsilon$ und $a_b-\varepsilon'$, so wird für die erste Spirale das τ (der ϕ-Wert, bei dem sie das Gebiet $\bar{T}$ verläßt) nahe bei ϕ_0 liegen. Die zweite Spirale erreicht die Grenze bei diesem Umlauf nicht und kann somit $\bar{T}$ erst bei einem ϕ-Wert verlassen, der um mehr als π/ω größer als ϕ_0 ist (vergl. Abb. 5). Die beiden Trajektorien mit sehr ähnlichen Anfangsbedingungen erfüllen also die Sprungbedingung an zwei weit auseinander liegenden Stellen.

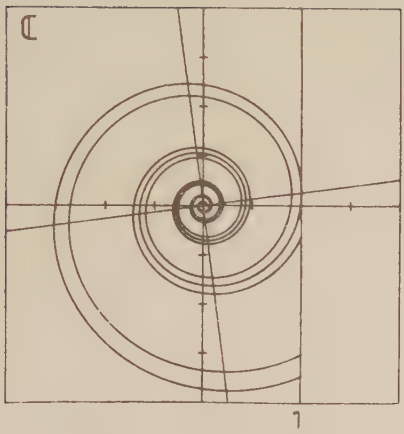


Abb. 5. Spiralen mit ähnlichen Startamplituden a können die Gerade Π an weit auseinander liegenden Punkten schneiden, dies ist die Voraussetzung für die Trennung benachbarter Trejektorien.
Parameter: $\omega = 7.5$, $a_2 = a_b$ (vergl. Gl. 28), $a_1 = 0.9 \cdot a_b$, $a_3 = 1.1 \cdot a_b$.

Im vorliegenden Fall wird allerdings diese Trennung der Trajektorien durch die Dynamik in $\tilde{T}$ wieder kompensiert oder es treten unbeschränkte Lösungen auf. Erst der nun zu behandelnde, voll dreidimensionale Fall erlaubt eine Entfaltung der Trennungseigenschaften bei beschränkten Lösungen und damit ein chaotisches Verhalten des Systems.

4 Die Geometrie der Trennebene S

Wie im zweiten Kapitel gezeigt wurde, kann das gesamte Systemverhalten anhand der Durchtrittspunkte der Lösungstrajektorien durch die Trennebene S beschrieben werden. Umgekehrt müssen sich aber auch die Strukturen des Phasenraums in der Geometrie von S widerspiegeln. In diesem Kapitel sollen eine Reihe von Eigenschaften der Halbabbildungen $\hat{P}$ aus der Geometrie des Phasenraums abgeleitet werden.

4.1 Statische und dynamische Mannigfaltigkeiten

Da die beiden Teildynamiken rein linear sind, fallen die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten im gesamten Phasenraum mit den von den Eigenvektoren aufgespannten Mannigfaltigkeiten zusammen. Die stabilen Mannigfaltigkeiten $\hat{M}_S$ (Störungen aus ihnen heraus, relaxieren in sie zurück) haben dann die Form:

$$\hat{M}_S = \hat{K} + \kappa \hat{t}^{\circ} \quad ; \quad \kappa \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Es handelt sich dabei um die fokalen Ebenen der Steady States, die bereits im letzten Kapitel ausführlich behandelt wurden. Der Schnitt der $\hat{M}_S$ mit S ist (in homogenen Koordinaten) einfach

$$\hat{\Sigma} := \{ (x,y)^T \mid x=0, \eta = \hat{n}_{\infty} \} \tag{2}$$

An dieser Stelle ist es praktisch, in S ein festes Koordinatensystem, das von den Teildynamiken unabhängig ist, einzuführen. Da die Halbabbildung $\bar{P}$ mehr Struktur aufweist als $\tilde{P}$, sei das Koordinatensystem in S der Einfachheit halber an die homogenen Koordinaten mit dem Ursprung in $\bar{K}$ angeschlossen.

Die beiden parallelen Geraden $\bar{\Sigma}$ und $\tilde{\Sigma}$ schneiden aus der Trennebene S einen Streifen S^0 heraus, innerhalb dessen sich fast die gesamte Dynamik der Halbabbildungen abspielt. Der Grund hierfür ist einfach einzusehen. Jede Trajektorie mit endlichen Anfangsbedingungen relaxiert in Richtung der jeweils stabilen Mannigfaltigkeit $\bar{M}_s$ oder $\tilde{M}_s$ und erreicht somit nach endlicher "Zeit" den Raum zwischen diesen beiden Ebenen, den sie nicht mehr verlassen kann. Damit liegen fast alle Durchtrittspunkte einer Trajektorie durch S in S^0. Alle periodischen und unendlichen nichtperiodischen Strukturen der Poincaré Abbildung P müssen also in diesem Streifen zu finden sein.

Die Situation bei den instabilen Mannigfaltigkeiten (Störungen aus ihnen heraus werden verstärkt)

$$\hat{M}_u = \hat{K} + \nu t^1 \quad ; \nu \in \mathbb{R} \tag{3}$$

ist noch einfacher, da diese vom reellen Eigenvektor allein aufgespannt werden, also lediglich eindimensional sind. Die Durchtrittspunkte $\hat{h}$ von $\hat{M}_u$ durch S ergeben sich zu

$$\hat{h} := \{(x,y)^T \mid u = \hat{\delta}, y = 0\} \quad . \tag{4}$$

Diese Punkte sollen homoklinoide Punkte genannt werden, da sie die Eintrittspunkte von homoklinen Trajektorien in $\hat{T}$ sind.

Hier soll nun, analog zu $\hat{n}_\infty$, ein $\hat{x}_0$ definiert werden, für das die Sprungbedingung bei Einschränkung auf die (in diesem Fall) instabile Mannigfaltigkeit erfüllt ist.

$$\hat{x}_0 := \hat{\xi} \tag{5}$$

Die einfache Gestalt von $\hat{x}_0$ und $\hat{n}_\infty$ ist eine unmittelbare Konsequenz der Tatsache, daß in der ersten Zeile der Transforma-

tionsmatrix $\mathbf{H}$ nur "1-en" stehen. Im anderen Fall müßten diese Größen als

$$\hat{x}_0 := \frac{\hat{\delta}}{H_{11}} \tag{6a}$$

und

$$\hat{\eta}_\infty := \frac{\hat{\delta}}{2H_{12}} \tag{6b}$$

definiert werden.

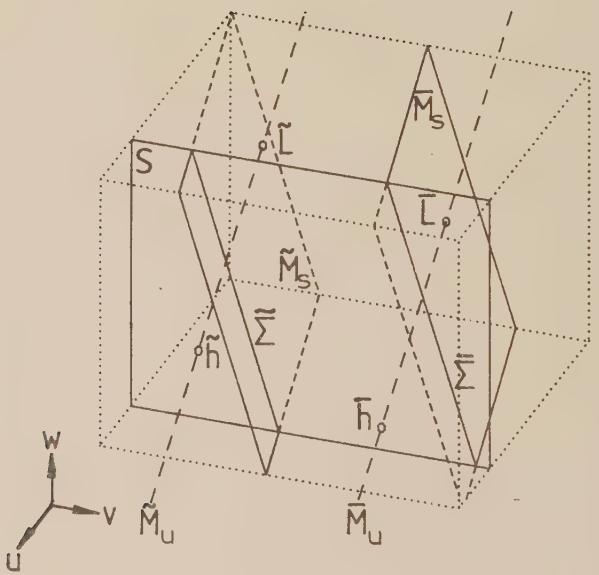


Abb. 1. Die statischen Strukturen des Phasenraums.
Achsen: u = -0.1 .. 0.2, v = -1.3 .. 0.5, w = -2 .. 1.4.
Parameter: b = 1, d = 0.2, e = 15, μ = 100, c = 3.5.

In den stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten verlaufen spezielle Trajektorien, deren Anfangswerte eine verschwindende

x- bzw. y-Komponente besitzen. Eine Trajektorie, die in der stabilen Mannigfaltigkeit aus dem realen Steady State herausspiralisiert und, nachdem sie $2N$ mal die Trennebene S gekreuzt hat, mit verschwindender y-Komponente in $\bar{T}$ eintritt, also innerhalb der instabilen Mannigfaltigkeit wieder in den realen Steady State läuft (aus dem sie kam und den sie erst nach unendlicher "Zeit" wieder verläßt), wird als homokline Trajektorie bezeichnet und ihr Eintrittspunkt in $\bar{T}$ als homoklinoider Punkt (s.o.).

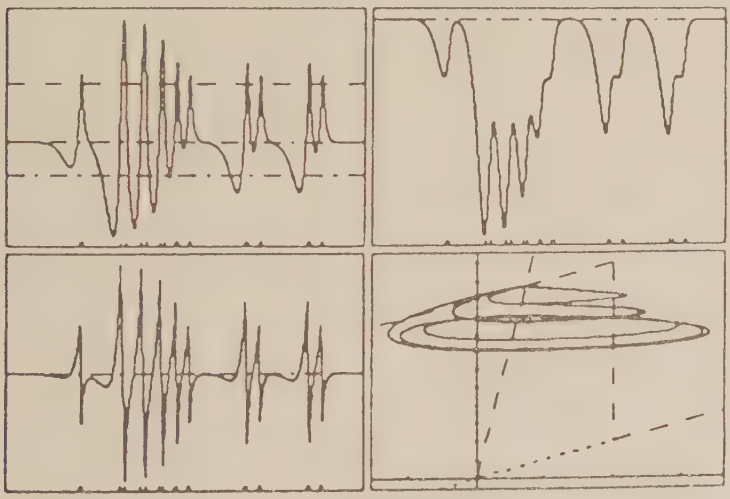


Abb. 2. Beispiel einer homoklinen Trajektorie, die 20 Schnittpunkte mit der Trennebene S besitzt. Aus [Ka,Rö 1983].

Dieser Fall läßt sich in unserem Modellsystem als Wellenzug mit N Impulsen auf einer unendlich ausgedehnten linearen Faser interpretieren. Solche homoklinen Trajektorien besitzen eine große Bedeutung in der Theorie der erregbaren Medien [Ca 1977; Wi 1980], da sie Vorgänge beschreiben, die nach einem Stimulus und einer darauf folgenden aktiven Reaktion des Mediums wieder

zum Ausgangs- (Ruhe-) Zustand zurückkehren. Auch in der Theorie des Chaos sind sie von großem Interesse. Nach einem Theorem von Shil'nikov [Shil 1965] existieren in der Umgebung einer homoklinen Trajektorie unendlich viele periodische Lösungen verschiedener Perioden, und damit ist auch Chaos zu finden.

Übertragen wir die Phasenraumbetrachtungen nun in die Trennebene, so schneidet eine homokline Trajektorie, die aus dem realen Steady State herausspiralisiert, S das erste Mal in einem Punkt aus $\bar{\Sigma}$, alle weiteren Durchtrittspunkte liegen dann (nach dem oben Gesagten) im Innern von S^0. Also ist eine Voraussetzung für das Auftreten homokliner Trajektorien, daß auch $\bar{h}$ in S^0 liegt. Sollen nur Systeme, die derartige Lösungen realisieren können untersucht werden, so wäre die eben genannte Eigenschaft als weitere Forderung an die Systemklasse zu formulieren. Da aber Homoklinizität für ein interessantes dynamisches Verhalten nicht unbedingt notwendig ist, soll an dieser Stelle eine etwas schwächere Bedingung aufgestellt werden.

SY3: In der zu untersuchenden Systemklasse besitzen $\bar{x}_0$ und $\tilde{x}$ das gleiche Vorzeichen.

Diese Voraussetzung hat eher technischen Charakter, da sie solche Systeme ausschließt, deren Trajektorien, wenn sie sich zwischen $\bar{M}_s$ und $\tilde{M}_s$ befinden, weder in $\bar{T}$ noch in $\tilde{T}$ einen vollen Umlauf um die jeweilige instabile Mannigfaltigkeit ausführen können, ohne das Gebiet wieder zu verlassen. Damit wird also ein Typ uninteressanten Systemverhaltens ausgeschlossen, was im weiteren Verlauf der Diskussion eine Reihe von Fallunterscheidungen erspart.

Die bisher behandelten statischen Mannigfaltigkeiten $\hat{M}_{s/u}$ sind Grenzfälle dynamischer Mannigfaltigkeiten. Diese werden von den Punkten aller Trajektorien gebildet, deren Anfangsbedingun-

gen sich lediglich in der Phase ihrer y-Komponente unterscheiden. Betrachten wir dazu als Prototypen Trajektorien mit den Anfangsbedingungen $(\alpha=\pm\hat{x}_0,\beta)$, so ist bei einer Polardarstellung des focalen Anteils ($r_0=|\beta|$, $\chi_0=\arg\beta$) das dynamische Verhalten innerhalb eines Halbraums durch

$$x(\phi) = \alpha\cdot e^{-\omega\phi} \tag{7a}$$

$$r(\phi) = |y(\phi)| = r_0\cdot e^{\phi} \tag{7b}$$

$$\chi(\phi) = \arg y(\phi) = \chi_0 + \omega\phi \tag{7c}$$

gegeben. Daraus wird klar, daß Trajektorien, deren Anfangsbedingungen lediglich verschiedene Phasen besitzen, sich für alle ϕ-Werte genau um diese Phasendifferenz unterscheiden. Eine rein geometrische Darstellung der Mannigfaltigkeiten, die von diesen Trajektorien gebildet werden, gelingt durch Auflösen von (7a) nach ϕ.

$$\mathcal{M}(r_0) := \left\{(x,y)^T \,\middle|\, |y|=r_0\left|\frac{x}{x_0}\right|^{-1/\rho}\right\} \tag{8}$$

Diese Mannigfaltigkeiten sollen dynamisch genannt werden, da die dynamische Entwicklung des Systems innerhalb eines Halbraums vollständig in einer, durch die Anfangsbedingungen festgelegten Mannigfaltigkeit verläuft. Jede solche Mannigfaltigkeit kann durch ein r_0 (bei $|x|=\hat{x}_0$) charakterisiert werden; ihre geometrische Gestalt ist die eines um $\hat{M}_u$ rotationssymmetrischen logarithmischen Kegels mit der stabilen Mannigfaltigkeit $\hat{M}_s$ als Trennebene zwischen den beiden Ästen.

Der aktuelle Radius einer solchen dynamischen Mannigfaltigkeit als Funktion von x ist nach (8) einfach

$$r(x;r_0) = r_0 \left|\frac{x}{x_q}\right|^{-1/\rho} \qquad (9)$$

Da jede Teildynamik die Zugehörigkeit einer Trajektorie zu einer dynamischen Mannigfaltigkeit als Erhaltungsgröße respektiert, ergibt sich die Struktur der Halbabbildungen aus dem Schnitt der dynamischen Mannigfaltigkeiten mit S. Der Wechsel einer Trajektorie zwischen den jeweiligen Mannigfaltigkeiten in $\bar{T}$ und $\bar{\bar{T}}$ erfolgt, wie der zwischen den Teildynamiken, nur in der Trennebene S.

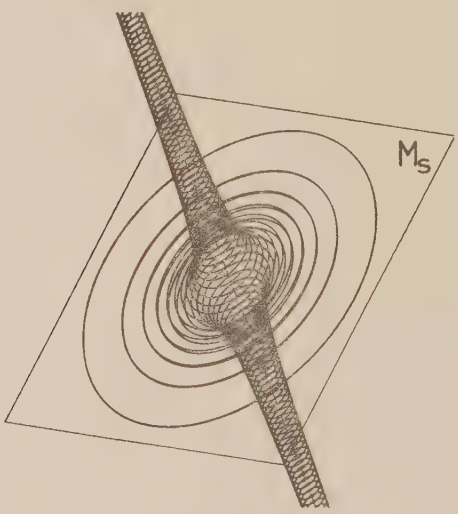


Abb. 3. Beispiel einer dynamischen Mannigfaltigkeit mit $r_0 = 0.15$, die stabile Mannigfaltigkeit bildet die Trennebene zwischen den beiden Ästen des logarithmischen Kegels.

4.2 Der x_0-Schnitt

Bevor wir uns ausführlich mit dem Schnitt der dynamischen Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}(r_0)$ mit der Trennebene S auseinandersetzen, sei hier zunächst der Schnitt mit den Ebenen $x=\hat{x}_0$ diskutiert. Diese Ebenen verlaufen parallel zu den stabilen Mannigfaltigkeiten und schneiden deshalb jede $\mathcal{M}(r_0)$ in einem Kreis mit dem Radius r_0 (vergl. Abb. 3). Dieser Radius charakterisiert die dynamische Mannigfaltigkeit vollständig und erlaubt damit, auf der Familie dieser Mannigfaltigkeiten die Topologie des $\mathbb{R}^+$ einzuführen.

Da in den Ebenen $x=\hat{x}_0$ der x-Wert konstant ist, bereitet es keinerlei Schwierigkeiten (unter der Annahme einer homogenen Dynamik), auf diese Ebenen zu extrapolieren oder zurückzurechnen; eine Methode, die im folgenden hauptsächlich beweistechnischen Wert haben wird.

4.3 Der S-Schnitt

So bequem und elegant die Darstellung der dynamischen Mannigfaltigkeiten im x_0-Schnitt auch ist, gelingt es doch nicht, alle Berechnungen dort durchzuführen. Aus diesem Grund sollen nun die Schnitte der dynamischen Mannigfaltigkeiten mit der Trennebene S untersucht werden.

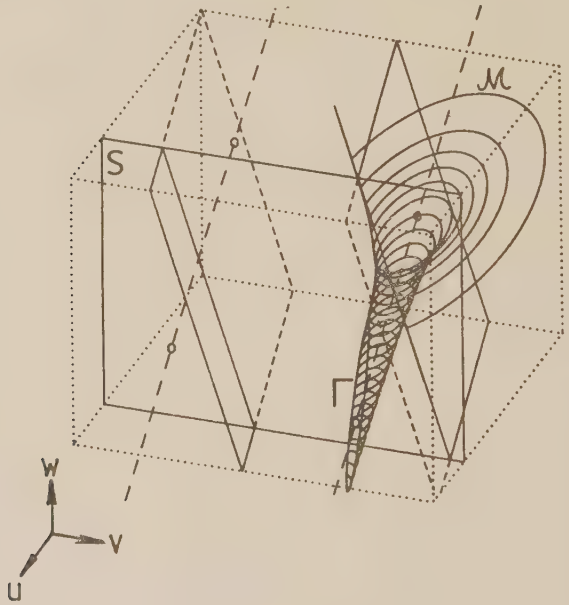


Abb. 4. Schnitt einer dynamischen Mannigfaltigkeit aus $\bar{T}$ mit S. Die statischen Strukturen sind aus Abb. 1 übernommen. Bei der gezeigten dynamischen Mannigfaltigkeit ist $r_0 = 0.15$.

Die Ebenen $x=\hat{x}_0$ und S schneiden sich in Geraden parallel zu $\hat{\Sigma}$. Ist also die Schnittlinie einer dynamischen Mannigfaltigkeit mit S bekannt, so ist der $|\xi|$-Wert dieser Schnitt-

linie (bzw. $|\xi-\mathrm{Im}\tilde{Y}|$) bei $x=\bar{x}_0$ (bzw. $\tilde{x}_0+\tilde{X}$) unmittelbar das r_0, das die Mannigfaltigkeit charakterisiert.

Um die Schnittlinien $\Gamma(r_0)$ der dynamischen Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}(r_0)$ mit S zu untersuchen, wechseln wir von der (dynamischen) ϕ-Darstellung in die geometrische x-Darstellung, wobei die Transformation zwischen beiden durch (7a) gegeben ist. Zunächst soll das x-Intervall bestimmt werden, in dem Schnittpunkte von $\mathcal{M}(r_0)$ und S liegen. Die Bedingung für einen Schnittpunkt bei gegebenem x-Wert ist, daß die Mannigfaltigkeit bei diesem x Punkte aus beiden Halbräumen besitzt, also u-Werte hat, die größer und kleiner als d sind. Um dies zu überprüfen ist es ausreichend, die u-Extrema zu betrachten; diese werden (unabhängig von x) bei $\xi=0$ angenommen, da dort

$$\mathrm{Re}\, y(x) = \pm|y(x)| = \pm r(x;r_0) \tag{10}$$

ist. Dies in (1.27) eingesetzt, liefert als Bedingung dafür, daß überhaupt ein Schnittpunkt von S mit $\mathcal{M}(r_0)$ an der Stelle x existiert:

$$\text{oder äquivalent} \qquad \begin{aligned} |\xi - x| &< 2r(x;r_0) \\ |\eta(x)| &< r(x;r_0) \quad . \end{aligned} \tag{11}$$

Hieraus läßt sich bei festem r_0 eine Bedingung für das x-Intervall formulieren, in dem Schnittpunkte existieren. Dazu müssen die Nullstellen von $|\eta(x)|-r(x;r_0)$ untersucht werden.

Satz 1

Die Funktion $F(x;r_0):=|\eta(x)|-r(x;r_0)$ besitzt für $\hat{x}_0, r_0>0$ im Intervall $(-\infty,0)$ genau eine Nullstelle (x_1), im Intervall $(0,\hat{x}_0)$ keine oder zwei Nullstellen (x_2,x_3), die auch entartet sein können sowie genau eine Nullstelle (x_4) im Intervall (x_0,∞). Ist $\hat{x}_0<0$, so gilt dieselbe Aussage mit umgekehrten Vorzeichen.

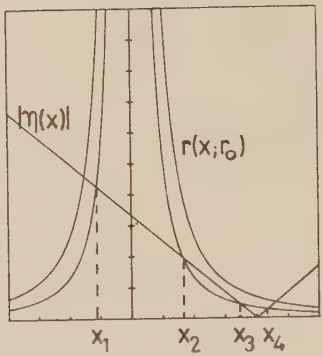


Abb. 5. Die Graphen der Funktionen $|\eta(x)|$ und $r(x;r_0)$ schneiden sich in zwei oder vier Punkten. Diese Anzahl entscheidet über den Charakter der Schnittlinie $\Gamma(r_0)$.

Beweis

Der erste Teil der Aussage ist einfach zu zeigen. Für $x \to \infty$ verschwindet $r(x;r_0)$ und wächst in $\mathbb{R}^-$ streng monoton, bis es für $x \to 0$ divergiert. $|\eta(x)|$ fällt in $\mathbb{R}^-$ linear auf den Wert $\hat{\eta}_\infty$ an der Stelle $x=0$. Damit schneiden sich nach dem Zwischenwertsatz die beiden Graphen in genau einem Punkt in $\mathbb{R}^-$.

Betrachten wir nun zunächst den dritten Teil der Aussage. Bei $x=\hat{x}_0$ verschwindet $|\eta(x)|$ und steigt für größere x-Werte linear an; dagegen ist $r(x;r_0)$ für alle Werte aus $\mathbb{R}^+$ positiv und streng monoton fallend, diese Funktion verschwindet für $x \to \infty$. An der Stelle $x=\hat{x}_0$ nimmt $r(x;r_0)$ den Wert $r_0 > 0$ an, somit folgt aus dem Zwischenwertsatz die Existenz genau einer weiteren Nullstelle (x_4).

Auch der zweite Teil der Aussage (zum Intervall $(0,\hat{x}_0)$) folgt aus dem Zwischenwertsatz. $|\eta(x)|$ fällt im Intervall $(0,\hat{x}_0)$ linear von $\hat{\eta}_\infty$ auf 0, $r(x;r_0)$ divergiert für $x \to 0$

und fällt streng monoton auf $r_0>0$ bei $x=\hat{x}_0$. Damit können nach dem Zwischenwertsatz in diesem Intervall Nullstellen nur paarweise auftreten. Daß höchstens ein solches Nullstellenpaar existieren kann, folgt aus einer Betrachtung der Ableitungen.

$$\frac{d}{dx} r(x;r_0) = \frac{-1}{\rho x} r(x;r_0) \qquad (12)$$

Die Ableitung von $r(x;r_0)$ divergiert demnach für $x\to 0$ und wächst streng monoton auf den Wert $-r_0/\rho\hat{x}_0$ bei $x=\hat{x}_0$. Dagegen besitzt die Ableitung von $|n(x)|$ im Intervall $(0,\hat{x}_0)$ konstant den Wert $-1/2$.

Liegt die erste Nullstelle von F im untersuchten Intervall bei x_2 und ist $r'(x_2;r_0)=-1/2$, so ist diese Nullstelle genau zweifach entartet (wegen der Monotonie von r ist kein höherer Entartungsgrad möglich) und für alle $x\in(x_2,\hat{x}_0)$ ist

$$\frac{d}{dx} r(x;r_0) > \frac{-1}{2} = \frac{d}{dx} |n(x)| \quad , \qquad (13)$$

was eine weitere Nullstelle in diesem Intervall ausschließt!

Ist $r'(x_2;r_0)<-1/2$, so schneiden sich die Graphen von $r(x;r_0)$ und $|n(x)|$, was eine einfache Nullstelle von F an der Stelle x_2 bedeutet. Nach dem oben Gesagten existiert dann im untersuchten Intervall ein x_3, das ebenfalls eine Nullstelle von F ist. Die Ableitung von $r(x;r_0)$ an dieser Stelle kann mit Hilfe des Mittelwertsatzes abgeschätzt werden; danach besitzt $r(x;r_0)$ an einem inneren Punkt von (x_2,x_3) die Steigung $-1/2$, was bedeutet, daß aus Gründen der Monotonie $r'(x_3;r_0)>-1/2$ ist. Somit gilt die Gleichung (13) und die Folgerung daraus auch für das Intervall $[x_3,\hat{x}_0)$.

Ist $\hat{x}_0<0$, so gelten alle Argumente unverändert, wenn die Vorzeichen der Steigungen umgekehrt werden und $x_1 \in \mathbb{R}^+$ sowie $x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^-$ genommen werden. Dieser Fall beschreibt den Schnitt des "-"-Astes einer dynamischen Mannigfaltigkeit mit S. ***

Die Schnittkurven der dynamischen Mannigfaltigkeiten mit S sind damit auf den x-Intervallen $[x_1,0)$ sowie $(0,x_4)$ bzw. $(0,x_2]$ und $[x_3,x_4]$ definiert. Die Endpunkte dieser Intervalle (außer x=0) sind geometrisch zwar Berührpunkte der $\mathcal{M}(r_0)$ mit S, der Begriff "Schnitt" ist in diesem Fall jedoch nicht geometrisch, sondern mengentheoretisch zu fassen.

Mit Hilfe von Satz 1 können nun die Schnittkurven $\Gamma(r_0)$ eines Astes von $\mathcal{M}(r_0)$ mit S, die durch

mit

$$\Gamma(r_0) := \{(x,\xi)^T \mid \xi = \xi(x)\}$$

$$\xi(x) = \pm\sqrt{r(x;r_0)^2 - \eta(x)^2} = \pm\sqrt{r_0^2\left|\frac{x}{x_0}\right|^{-2/D} - \frac{(\delta-x)^2}{4}} \qquad (14)$$

gegeben sind, nach der Anzahl der Nullstellen von F klassifiziert werden.

Existiert nur eine Nullstelle (x_1 oder x_4) in $\mathbb{R}^+$ bzw. $\mathbb{R}^-$, so ist der Schnitt eine einfach zusammenhängende, sogenannte Ω-Kurve. Hat F aber drei verschiedene Nullstellen (x_2, x_3, x_4) in $\mathbb{R}^+$ bzw. $\mathbb{R}^-$, so nimmt $\xi(x)$ auf zwei disjunkten, einfach zusammenhängenden Teilintervallen $(0,x_2]$ und $[x_3,x_4]$ reelle Werte an, damit zerfällt auch die Schnittlinie $\Gamma(r_0)$ in eine geschlossene Isola und eine (analog zur Ω-Kurve) offene Basislinie, die sich für kleine x-Werte an $\hat{\Sigma}$ anschmiegt.

Zwischen Isola und Ω-Kurve liegt ein interessanter Grenzfall, bei dem x_2 und x_3 entarten. Die Schnittkurve hat dabei die Form eines cartesischen Blatts.

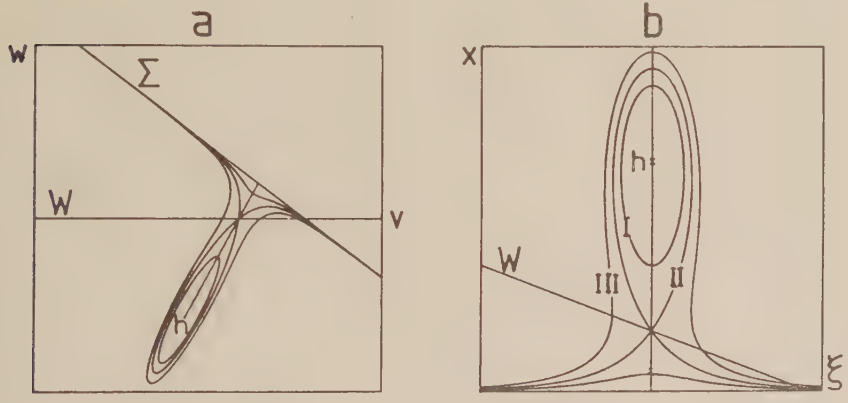


Abb. 6. Die Schnittlinien $\Gamma(r_0)$ eines Astes von $\mathcal{M}(r_0)$ mit S lassen sich in drei Typen unterteilen. (I) eine Isola mit Basislinie, (II) ein cartesisches Blatt, das einen Grenzfall darstellt und (III) eine Ω-Kurve. In Teil (a) sind diese drei Typen in der S-Ebene des Beispielsystems dargestellt.
Achsen: v = $\bar{V}$-0.3 .. $\bar{V}$+0.3, w = -3 .. 3.
Parameter: b = 1, d = 0.2, e = 15, μ = 100, c = 3.5.
(b) zeigt die gleichen Kurven in einer modellunabhängigen, diagonalisierten x-ξ-Darstellung. Diese Darstellung wird in Zukunft meist verwendet.

In (14) tritt nun eine interessante Eigenschaft der Schnittlinien zutage: Diese sind von ω unabhängig. In der modellunabhängigen Darstellung sind demnach alle Γ's mit gleichem ρ und r_0 identisch, der kanonische Parameter ω beeinflußt lediglich die Lage der Trennlinie **W**.

Wie aus Satz 1 hervorgeht, tragen zur Halbabbildung $\bar{P}$ alle drei Typen von Schnittkurven bei, da $\bar{x}_0 > 0$ ist und S^0

von allen $\mathcal{M}(r_0)$ jeweils den Ast mit positiven x-Werten schneidet. Dagegen kommen in $\tilde{P}$ nur Ω-Kurven vor, weil auch in diesem Fall $\tilde{x}_0>0$ ist, S^0 aber jeweils nur den Ast der $\mathcal{M}(r_0)$ mit negativen x-Werten schneidet. Dies liefert einen Hinweis auf die mögliche Komplexität der beiden Halbabbildungen. Da nur in $\bar{P}$ ein cartesisches Blatt und Isolae auftreten können, soll auch nur diese Abbildung in den nächsten Abschnitten untersucht werden. (Dort sollen dann auch die Querungen entfallen, solange die Eindeutigkeit gewahrt bleibt.)

4.3.1 Der cartesische Punkt

Hat die Schnittlinie $\Gamma(r_0)$ die Form eines cartesischen Blatts, so kann die entartete Nullstelle von F $(x_2=x_3=x_c)$ explizit bestimmt werden. Hierzu betrachten wir nochmals die Ableitung von $r(x;r_0)$ nach x und verlangen einen Berührpunkt von $r(x;r_0)$ mit $|\eta(x)|$. Im ersten Schritt sollen die Ableitungen an der Stelle $x=x_c$ zur Übereinstimmung gebracht werden.

$$\frac{d}{dx}\, r(x_c;r_0) = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{-1}{\rho x}\, r(x_c;r_0) = \frac{-1}{2} \qquad (15)$$

Da x_c und x_0 das gleiche Vorzeichen haben, können die Beträge in $r(x_c;r_0)$ entfallen und es wird

$$2r_0 \left(\frac{x_c}{x_0}\right)^{-1/\rho} = \rho x_c$$

$$x_c = \left(\frac{2r_0}{\rho}\right)^{\rho/(\rho+1)} x_0^{1/(\rho+1)} \qquad (16)$$

An dieser Stelle x_c muß nun der Wert der Funktionen angepaßt werden, was einen Ausdruck für r_c, den Radius des cartesischen Blatts im x_0-Schnitt liefert.

$$r(x_c;r_c) = |\eta(x_c)| = \eta(x_c) \tag{17}$$

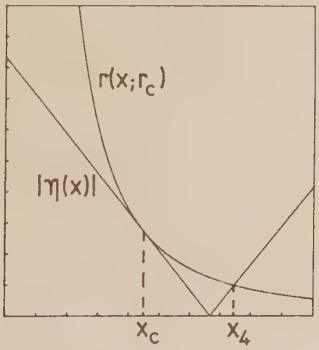


Abb. 7. Für $r_0 = r_c$ berühren sich die Graphen von $|\eta(x)|$ und $r(x;r_0)$ an der Stelle x_c. Daraus können r_c und x_c bestimmt werden.

Hierin x_c eingesetzt liefert das gesuchte r_c.

$$2r_c\left(\frac{2r_c}{\rho}\right)^{-1/(\rho+1)} x_0^{1/(\rho+1)} = \delta - \left(\frac{2r_c}{\rho}\right)^{\rho/(\rho+1)} x_0^{1/(\rho+1)}$$

$$x_0^{1/(\rho+1)} (2r_c)^{\rho/(\rho+1)} \left(\rho^{1/(\rho+1)} + \rho^{\rho/(\rho+1)}\right) = \delta$$

$$2r_c = \delta^{(\rho+1)/\rho} x_0^{-1/\rho} (\rho+1)^{-(\rho+1)/\rho}$$

Ausnutzen der Identität $\delta = x_0 = 2\eta_\infty$ ergibt dann

$$r_c = n_\infty \rho (\rho+1)^{-(\rho+1)/\rho} \quad . \tag{18}$$

Wird dieses r_c nun wiederum in (16) eingesetzt, so ergibt dies den x-Wert des cartesischen Punktes $\mathbf{x}_c$.

$$\boxed{x_c = \frac{x_0}{\rho+1}} \tag{19}$$

Der Einfachkeit halber (da die ξ-Komponente bekannt ist - hier sogar verschwindet) wird in Zukunft oft die x-Komponente allein als cartesischer Punkt bezeichnet. (Der Punkt $\mathbf{x}_c=(x_c,0)^T$ soll im Schriftbild durch Fettdruck gekennzeichnet werden.)

Mit diesem Ergebnis findet nun der Satz 1 eine praktische Anwendung. Wir formulieren deshalb als Korollar zu diesem Satz:

Satz 2

Eine dynamische Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}(r_0)$ schneidet für $r_0<r_c$ die Trennebene S in zwei getrennten Kurven (Isola und Basislinie), für $r_0=r_c$ in einem cartesischen Blatt und für $r_0>r_c$ in einer Ω-Kurve.

Beweis

Die zweite Aussage ist nach Konstruktion von r_c erfüllt.

Für die beiden anderen Aussagen betrachten wir $r(x;r_0)$ im x-Intervall $I:=(0,x_0]$. Sei $r_1<r_c<r_2$, so ist für alle $x\in I$:

$$r(x;r_1) < r(x;r_c) < r(x;r_2) \quad . \tag{20}$$

Speziell an der Stelle $x=x_c$ ist $r(x_c;r_1)<r(x_c;r_c)=|n(x_c)|$, was eine Nullstelle von $F(x;r_1)=|n(x)|-r(x;r_1)$ im Intervall

(x_c,x_0) impliziert. Nach Satz 1 existieren dann genau zwei Nullstellen (x_2,x_3) in I und $\Gamma(r_1)$ ist auf $(0,x_2]$ und $[x_3,x_4]$ definiert.

Zum Beweis der dritten Aussage betrachten wir die rechte Hälfte von (20). Nach Konstruktion ist für alle $x\varepsilon I$ $r(x;r_c)>|n(x)|$, somit ist in I $r(x;r_2)$ immer größer als $|n(x)|$, was, nach Satz 1, die Existenz von Schnittpunkten der dynamischen Mannigfaltigkeit mit der Trennebene im Innern von I ausschließt. ***

Der cartesische Punkt $\mathbf{x}_c$ besitzt noch eine Reihe weiterer interessanter Besonderheiten und wird deshalb noch häufig Erwähnung finden. Hier soll nun noch eine zentrale Eigenschaft von $\mathbf{x}_c$ herausgestellt werden.

Satz 3

Der cartesische Punkt $\mathbf{x}_c$ liegt bei allen betrachteten Systemen auf der Geraden **W**.

Beweis

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen, d.h. Einsetzen der Koordinaten von $\mathbf{x}_c$ in die Transformationsgleichung (1.23). Dabei ist nach Konstruktion $\xi(x_c)=0$, und $n(x_c)$ folgt aus (1.27). Also wird

$$\begin{aligned} w &= -\rho x_c + 2\mathrm{Re}\left[(1+i\omega)(n(x_c)+i\xi(x_c))\right] \qquad (21)\\ &= -\rho x_c + \delta - x_c \\ &= \frac{-\rho\delta}{\rho+1} + \delta - \frac{\delta}{\rho+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$ ***

Der cartesische Punkt liegt nach diesem Satz also auf der Grenze zwischen dem Urbild- und dem Bild-Bereich der Halbabbildung $\bar{P}$.

Darüber hinaus liegt er nach Konstruktion auf der Geraden $\xi=0$, er ist der Schnittpunkt von W und $\xi=0$. Diese Eigenschaft ist, wie gezeigt wurde, eine Invariante im kanonischen Parameterraum und stellt von daher einen Ausgangspunkt für die Untersuchung jedes konkreten Systems dar.

4.3.2 Die Bedingung für einfache Isolae

Nach dem bisher vorgestellten Material erscheint es so, als würden bei allen Systemen die Isolae und der geschlossene Teil des cartesischen Blatts vollständig in S^-, also im Definitionsbereich von $\overline{P}$ liegen. Dies ist zwar der einfachste und am häufigsten anzutreffende Fall, aber nicht die Regel. Zur Klärung dieses Problems bedarf es einiger Vorbereitungen; dabei ist zu beachten, daß (hier und in der Folge) nicht nur die Größen innerhalb einer Halbabbildung (z.B. r_o), sondern auch die Systeme selbst, d.h. die Punkte im kanonischen Parameterraum, variiert werden. Es sollen also Eigenschaften herausgearbeitet werden, die alle Systeme in einem bestimmten Bereich des Parameterraums aufweisen.

Betrachten wir zunächst die Beziehungen zwischen den verschiedenen Schnittkurven $\Gamma(r_o)$ die eine Halbabbildung charakterisieren.

Satz 4

Sei $r_1<r_2$, dann liegt die Schnittlinie $\Gamma(r_1)$ vollständig im Innern des Gebiets, dessen Rand von $\Gamma(r_2)$ und $\bar{\Sigma}$ gebildet wird.

Beweis

Für alle x-Werte, bei denen $\Gamma(r_1)$ definiert ist, folgt nach (14) für die ξ-Werte:

$$|\xi_1(x)|^2 = r_1^2 \left|\frac{x}{x_0}\right|^{-2/\rho} - \left(\frac{\delta - x}{2}\right)^2 < r_2^2 \left|\frac{x}{x_0}\right|^{-2/\rho} - \left(\frac{\delta - x}{2}\right)^2 = |\xi_2(x)|^2 \qquad (22)$$

Weiterhin läßt sich analog zum Beweis von Satz 1 zeigen, daß der Definitionsbereich von $\Gamma(r_2)$ eine Obermenge des Definitionsbereichs von $\Gamma(r_1)$ ist. Damit liegt jeder Punkt von $\Gamma(r_1)$ auf einer Strecke, die zwei Punkte von $\Gamma(r_2)$ oder einen Punkt von $\Gamma(r_2)$ und einen von $\overline{\Sigma}$ verbindet. ***

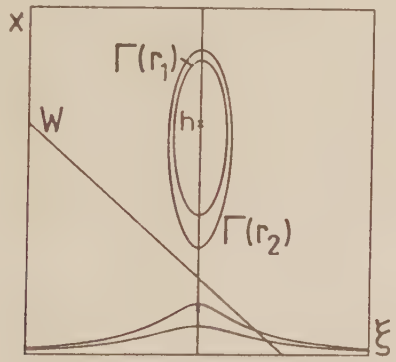


Abb. 8. Zur Veranschaulichung von Satz 4: Die Isola mit dem kleineren r_0 liegt vollständig innerhalb der anderen Isola.
Parameter: $\rho = 2$, $\omega = 1$, $\delta = 1$, $r_1 = 0.8 \cdot r_c$, $r_2 = 0.95 \cdot r_c$.
Achsen: $\xi = -1 \,..\, 1$, $x = 0 \,..\, 1.5$.

Auf diese Weise können die Schnittlinien $\Gamma(r_0)$, ebenso wie die Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}(r_0)$, eindeutig durch eine einzige Zahl, nämlich r_0, charakterisiert werden, was eine Teilordnung in S induziert.

Eine weitere, scheinbar "offensichtliche", Eigenschaft aller Isolae in einem System formuliert der folgende

Satz 5

Jede Isola bildet den Rand eines konvexen Gebiets in S.

Beweis

Es soll bewiesen werden, daß der Rand des Gebiets keine Ein-oder Ausbuchtungen besitzt, d.h., die zweite Ableitung von ξ nach x keine Vorzeichenwechsel im Intervall (x_3,x_4) hat. Nach (14) ist

$$\xi(x) = \pm\sqrt{r(x;r_0)^2 - \eta(x)^2}$$

damit wird

$$\frac{d^2}{dx^2}\xi(x) = \xi(x)^{-1}\left[r(x;r_0)r''(x;r_0)+r'(x;r_0)^2-\eta(x)\eta''(x)-\eta'(x)^2\right] - \frac{\xi'(x)}{\xi(x)^2}\left[r(x;r_0)r'(x;r_0)-\eta(x)\eta'(x)\right] \tag{23}$$

Dieser Ausdruck kann unter Berücksichtigung von $\eta''(x)=0$ noch vereinfacht werden

$$\frac{d^2}{dx^2}\xi(x) = \frac{1}{\xi(x)^2}\left[r(x;r_0)r''(x;r_0)\cdot(r(x;r_0)^2-\eta(x)^2) - (r(x;r_0)\eta'(x)-\eta(x)r'(x;r_0))^2\right] \tag{24}$$

Werden hierin nun die Funktionen $r(x;r_0)$ und $\eta(x)$ sowie deren Ableitungen eingesetzt, so ergibt dies nach kurzer Rechnung

$$\frac{d^2}{dx^2}\xi(x) = \xi(x)^{-3}\left(\frac{r_0}{2\rho}\right)^2\left|\frac{x}{x_0}\right|^{-(2\rho+2)/\rho}4\left(\frac{r_0}{x_0}\right)^2(\rho+1)$$

$$- \left(\frac{2}{x_0}\right)^2 (\rho+2) \left|\frac{x}{x_0}\right|^{2/\rho} \left(\frac{\delta - x}{2}\right)^2$$

$$+ \frac{4}{x_0} \rho \left|\frac{x}{x_0}\right|^{(\rho+2)/\rho} \cdot \frac{\delta - x}{2} - \delta^2 \left|\frac{x}{x_0}\right|^{2(\rho+1)/\rho}$$

$$= \xi(x)^{-3} r_0^2 \frac{\rho+1}{4\rho^2} \left|\frac{x}{x_0}\right|^{-2(\rho+2)/\rho} \left[4\left(\frac{r_0}{x_0}\right)^2 + 4\left|\frac{x}{x_0}\right|^{(\rho+2)/\rho}\right. \tag{25}$$

$$\left. - \frac{\rho+2}{\rho+1} \left|\frac{x}{x_0}\right|^{2/\rho} - (\rho+2)\left|\frac{x}{x_0}\right|^{2(\rho+1)/\rho}\right]$$

Diesem Ausdruck ist nun nicht leicht anzusehen, wie viele Nullstellen er im Intervall (x_3, x_4) besitzt, wobei x_3 und x_4 selbst für beliebige Isolae nicht geschlossen angegeben werden können. Aus diesem Grund sollen die analytischen Eigenschaften der zweiten Ableitung von ξ indirekt ermittelt werden.

Da nur der Faktor in Blockklammern einen Vorzeichenwechsel aufweisen kann, soll auch nur dieser weiter untersucht werden. Hierzu führen wir zunächst die reduzierte Variable

$$\kappa := \left|\frac{x}{x_0}\right| \tag{26}$$

ein und nutzen den Zusammenhang zwischen δ, η_∞ und x_0 aus. Damit definieren wir eine Funktion

$$D(\kappa) := 4\left(\frac{r_0}{x_0}\right)^2 + 4\kappa^{(\rho+2)/\rho} - \frac{\rho+2}{\rho+1}\kappa^{2/\rho} - (\rho+2)\kappa^{2(\rho+1)/\rho} \tag{27}$$

Für dieses $D(\kappa)$ soll gezeigt werden, daß es im Innern des Intervalls $(x_3/x_0, x_4/x_0)$ nur negative Werte annimmt, da diese Eigenschaft von der zu untersuchenden zweiten Ableitung von ξ geteilt wird. Auch die Funktion D läßt sich nicht einfach handhaben, weshalb die gewünschte Eigenschaft für eine Funktion gezeigt werden soll, die an jeder Stelle größer als D ist. Zu diesem Zweck kann $D(\kappa)$ nach oben abgeschätzt werden, indem im

ersten (positiven) Term r_c anstelle von r_0 gesetzt wird.

$$\bar{D}(\kappa) := \rho^2(\rho+1)^{-2(\rho+1)/\rho} + 4\kappa^{(\rho+2)/\rho} - \frac{\rho+2}{\rho+1}\kappa^{2/\rho} - (\rho+2)\kappa^{2(\rho+1)/\rho} \tag{28}$$

Die Funktion $\bar{D}(\kappa)$ beschreibt den Fall eines cartesischen Blatts; wenn die Aussage des Satzes für $r_0=r_c$ gezeigt werden kann, dann gilt sie auch für alle anderen r_0, welche eine Isola beschreiben, da diese nach Satz 4 für Isolae ja kleiner als r_c sein müssen. $\bar{D}$ bildet also eine obere Schranke für alle D.

Um das Verhalten von $\bar{D}$ zu untersuchen, seien die Funktionswerte an den drei ausgezeichneten Stellen $\kappa_c := x_c/x_0 = 1/(\rho+1)$, 1 und x_b/x_0 bestimmt. Aus den Werten der Funktion an diesen Stellen soll (unter Berücksichtigung des stetigen Verlaufs und der Differenzierbarkeit von $\bar{D}$) auf den Verlauf der Funktion im Innern des interessierenden Intervalls geschlossen werden.

$$\bar{D}(\kappa_c) = (\rho+1)^{-2(\rho+1)/\rho}\left[\rho^2+4(\rho+1)-(\rho+2)(\rho+1)-(\rho+2)\right] = 0 \tag{29}$$

Zur Festlegung der Vielfachheit dieser Nullstelle müssen auch die Ableitungen von $\bar{D}$ an der Stelle κ_c bestimmt werden. Dabei folgt für die erste Ableitung:

$$\frac{d}{d\kappa}\bar{D}(\kappa_c) = \frac{1}{\rho}\left[4(\rho+2)(\rho+1)^{2/\rho} - 2\frac{\rho+2}{\rho+1}(\rho+1)^{(\rho-2)/\rho} - 2(\rho+2)(\rho+1)(\rho+1)^{-(\rho+2)/\rho}\right] = 0 \tag{30}$$

Die zweite Ableitung an dieser Stelle liefert:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\kappa^2}\,\bar{D}(\kappa_c) &= 2\frac{\rho+2}{\rho^2}\left[4(\rho+1)^{(\rho-2)/\rho}+\frac{\rho-2}{\rho+1}(\rho+1)^{2(\rho-1)/\rho}\right.\\ &\quad\left.-(\rho+2)(\rho+1)(\rho+1)^{-2/\rho}\right]\\ &= 2\frac{\rho+2}{\rho^2}(\rho+1)^{(\rho-2)/\rho}\left[4-2+\rho-\rho-2\right] \qquad (31)\\ &= 0\end{aligned}$$

Da auch die zweite Ableitung an der Stelle κ_c verschwindet, besitzt die Nullstelle mindestens die Ordnung drei. Der Wert der dritten Ableitung von $\bar{D}$ soll nun auch noch bestimmt werden, da er für den Verlauf der Funktion in der Umgebung von κ_c entscheidend sein kann.

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{d\kappa^3}\,\bar{D}(\kappa_c) &= 2\frac{\rho+2}{\rho^3}\left[4(2-\rho)(\rho+1)^{2(\rho-1)/\rho}\right.\\ &\quad-2\frac{\rho-2}{\rho+1}(\rho-1)(\rho+1)^{(3\rho-2)/\rho}\\ &\quad\left.-2(\rho+1)(\rho+2)(\rho+1)^{(\rho-2)/\rho}\right]\\ &= 4\frac{\rho+2}{\rho^3}(\rho+1)^{2(\rho-1)/\rho}\left[4-2\rho-2+3\rho-\rho^2-\rho-2\right]\\ &= -4\frac{\rho+2}{\rho^3}(\rho+1)^{2(\rho-1)/\rho} \qquad (32)\\ &< 0\end{aligned}$$

Hieraus wird deutlich, daß im Falle des cartesischen Blatts die zweite Ableitung von ξ an der Stelle x_c eine dreifache Nullstelle besitzt. Weiterhin ist die dritte Ableitung negativ, woraus

$$D\left(\frac{x_c}{x_0}+\varepsilon\right) < 0 \qquad (33)$$

folgt. Der Graph von $\bar{D}$ schneidet also die κ-Achse an der Stelle κ_c.

Betrachten wir nun $\bar{D}$ am Punkt 1.

$$\begin{aligned}\bar{D}(1) &= \rho^2(\rho+1)^{-2(\rho+1)/\rho} + 4 - \frac{\rho+2}{\rho+1} - (\rho+2)\\ &= \frac{1}{\rho+1}\left[\rho^2(\rho+1)^{-(\rho+2)/\rho} + 4(\rho+1) - (\rho+2) - (\rho+2)(\rho+1)\right]\\ &= \frac{\rho^2}{\rho+1}\left[(\rho+1)^{-(\rho+2)/\rho} - 1\right] \qquad (34)\\ &< 0\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $\bar{D}$ im Intervall $(x_c/x_0, 1]$ nur negative Werte annimmt; denn hätte $\bar{D}$ im Innern des Intervalls einen positiven Wert, so müßten wegen der Stetigkeit nach dem Zwischenwertsatz mindestens zwei Nullstellen in diesem Intervall liegen. In (28) haben alle Exponenten Werte zwischen 0 und 4, so daß höchstens vier Nullstellen auftreten können, da die Nullstelle bei x_c/x_0 aber bereits dreifach entartet ist, ist ein weiteres Nullstellenpaar unmöglich.

Für das Intervall $(1, x_4/x_0)$ verläuft die Argumentation analog. Hierzu gehen wir zurück zu (24) und betrachten das Vorzeichen der Blockklammer, diese ist bis auf einen Faktor identisch mit $D(\kappa)$. Für $x \to x_4$ verschwindet der erste Summand (der zweite Faktor darin ist gerade ξ^2, das nach Konstruktion an der Stelle x_4 verschwindet), der zweite Summand bleibt jedoch endlich (vergl. den Beweis von Satz 1). Somit ist $D(\kappa)$ auch im Intervall $(1, x_4/x_0)$ negativ, da die Funktion an den Intervallgrenzen negativ ist und im Innern wiederum kein Nullstellenpaar auftre-

ten kann.

Damit ist gezeigt, daß die zweite Ableitung von $\xi(x)$ ihr Vorzeichen innerhalb eines Astes, durch den eine Isola beschrieben wird, nicht ändert. ***

Die beiden letzten Sätze (4 und 5) werden als Lemmata für den nun folgenden zentralen Satz dieses Abschnitts benötigt. Dieser Satz beantwortet die Frage nach den Systemen, deren sämtliche Isolae vollständig im Innern von S^- liegen.

Satz 6

Für alle Systeme, die die Bedingung

$$\omega^2 < \rho + 1 \tag{35}$$

erfüllen, liegen sämtliche Isolae ganz im Innern von S^-.

Beweis

Um den Beweis übersichtlich zu gestalten, soll zunächst der Gang skizziert werden: Nach Satz 4 liegen alle Isolae eines beliebigen Systems vollständig im Innern des cartesischen Blatts $\Gamma(r_c)$, damit darf anstelle aller Isolae dieser Grenzfall betrachtet werden.

Der Punkt x_c liegt nach Satz 3 auf der Geraden W, die S^+ von S^- trennt. Wenn $\Gamma(r_c)$ die Gerade W schneidet, so muß dies wegen der Konvexität der Schnittlinie in x_c geschehen. Ein Grenzfall ist dann erreicht, wenn W eine Tangente von $\Gamma(r_c)$ ist.

Es bleibt also noch zu zeigen, daß für $\omega^2=\rho+1$ das cartesische Blatt die Gerade **W** im Punkt x_c berührt.

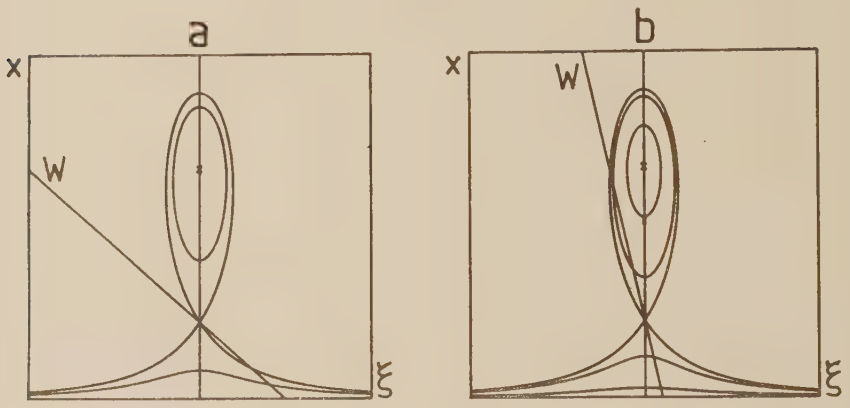


Abb. 9. Einfache und komplizierte Isolae. In (a) sind die Parameter so gewählt, daß nur einfache Isolae auftreten können.
Systémparameter: $\rho = 2$, $\omega = 1$.
Das System in (b) kann, je nach r_0, einfache und komplizierte Isolae realisieren.
Parameter: $\rho = 2$, $\omega = 5$.
Achsen für (a) und (b): $\xi = -1 \,..\, 1$, $x = 0 \,..\, 1.5$.

Auf $\Gamma(r_c)$ ist

$$r(x;r_c) = r_c \left|\frac{x}{x_0}\right|^{-1/\rho}$$

$$\eta(x) = \frac{\delta - x}{2} \qquad (36)$$

$$\xi(x) = \pm\sqrt{r(x;r_c)^2 - \left(\frac{\delta - x}{2}\right)^2}$$

damit wird

$$w(x) = -\rho x \mp 2\mathrm{Re}\left[(1+i\omega)(\eta(x)+i\xi(x))\right] \quad . \tag{37}$$

Betrachten wir nun die Ableitung von w:

$$\frac{d}{dx} w(x) = -\rho - 1 \mp 2\omega \frac{2r(x;r_c)r'(x;r_c) + \eta(x)}{2\xi(x)} \tag{38}$$

Dieser Ableitung besitzt an der Stelle $x=x_c$ im dritten Term einen unbestimmten Ausdruck der Form "0/0", deshalb muß die Ableitung von ξ nach x noch genauer untersucht werden. Dazu betrachten wir $[\xi(x)]^2$ und wenden die Regel von l'Hospital an:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_c} \xi(x)^2 &= \frac{\lim\limits_{x\to x_c} \frac{d}{dx}\left[(r(x;r_c)r'(x;r_c) + \frac{1}{2}\eta(x)\right]^2}{\lim\limits_{x\to x_c} \frac{d}{dx}\left[r(x;r_c)^2 - \eta(x)^2\right]} \\
&= \lim_{x\to x_c} \frac{r(x;r_c)^2}{\rho^2 x^2}(\rho+2) - \frac{1}{4} \\
&= \frac{\rho+1}{4}
\end{aligned} \tag{39}$$

Damit wird nun

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} w(x_c) &= -(\rho+1) \mp \omega\sqrt{\rho+1} \\
&= -(\rho+1)\left(1 \mp \frac{\omega}{\sqrt{\rho+1}}\right)
\end{aligned} \tag{40}$$

Hieraus wird ersichtlich, daß der "+"-Ast von $\Gamma(r_c)$ die Gerade W immer mit negativer Steigung schneidet, d.h. für $x>x_c$ liegen alle Punkte dieses Astes in S^-.

Der "-"-Ast berührt für $\omega^2=\rho+1$ die Gerade W und schneidet sie für größere ω-Werte mit positiver Steigung, was bedeutet, daß dieser Ast dann für x-Werte, die größer als x_c sind, auch Punkte in S^+ besitzt. ***

Dieser Satz erlaubt es also zu entscheiden, ob alle Isolae eines Systems vollständig auf die zugehörigen Basislinien abgebildet werden, oder ob der Abbildungsmechanismus komplizierter ist.

Die Umkehrung von Satz 6 ergibt sich als Korollar desselben.

Satz 7

Alle Systeme, für die $\omega^2>\rho+1$ ist, besitzen Isolae, die teilweise in S^+ verlaufen.

Beweis

An der Stelle $x>x_c$ sei für das cartesische Blatt

$$w(x_1;r_c) = -\rho x_1 + 2\left\{\frac{\delta - x_1}{2} + \omega\sqrt{r_c^2\left|\frac{x_1}{x_0}\right|^{-2/\rho} - \eta(x_1)^2}\right\} > 0 \qquad (41)$$

Die Existenz eines solchen Punktes (x_1) wird von Satz 6 garantiert. Die Funktion $w(x;r_0)$ ist jedoch nicht nur in ihrem Argument x, sondern auch in dem Parameter r_0 stetig; wählen wir nun ein r_1 so, daß

$$r_1^2\left|\frac{x_1}{x_0}\right|^{-2/\rho} - \eta(x_1)^2 = 0 \qquad (42)$$

wird, so ist

$$w(x_1;r_1) = -(\rho+1)x_1 + \delta < 0 \quad , \qquad (43)$$

da $x_1>x_c=x_0/(\rho+1)$ ist. Also existiert nach dem Zwischenwertsatz ein r_2 mit

für das

$$r_1 < r_2 < r_c \qquad w(x_1; r_2) = 0 \tag{44}$$

gilt. Somit besitzen alle Isolae, deren r_0 im nichtleeren Intervall (r_2, r_c) liegt, Punkte in S^+. ***

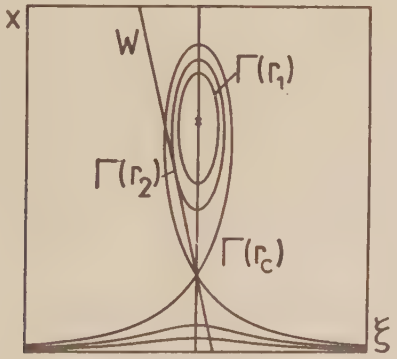


Abb. 10. Zum Beweis von Satz 7. Wenn das cartesische Blatt die Gerade W überschreitet, so kann auch eine Isola mit $r_0=r_2$ gefunden werden, die die Gerade berührt, alle Isolae mit größerem r_0 verlaufen dann teilweise in S^+.
Parameter: $\rho = 1$, $\omega = 5$, $\delta = 1$.
Achsen: $\xi = -1 .. 1$, $x = 0 .. 1.5$.

Dieser Satz eröffnet die Möglichkeit, eine weitere Komplikation in die Halbabbildung $\bar{P}$ einzuführen. Während einfache Isolae, die vollständig in S^- liegen, durch $\bar{P}$ auf die dazugehörige Basislinie (siehe dazu die Diskussion in Abschnitt 5.4) abgebildet werden, werden komplizierte Isolae teilweise auf sich selbst abgebildet, während das Bild des restlichen Teils wieder auf die Basislinie fällt. Wir begegnen an dieser Stelle also einem weiteren, komplizierteren Trennungsmechanismus, der ebenso wie der erste für das Auftreten chaotischer Lösungen verantwortlich sein kann. Aber u.U. ein komplexeres Chaos bewirkt.

4.3.3 Die Trajektoriendichte auf den Schnittkurven

Für das Auffinden und die Charakterisierung konkreter Lösungen ist es wichtig zu wissen, welches Gebiet in S von den Halbabbildungen häufig und welche Gebiete seltener benutzt werden. Zur Behandlung dieses Problems gehen wir von dynamischen Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}(r_0)$ mit einer gleichmäßigen Trajektoriendichte n in der Ebene $x=x_0$ aus. Sei χ die Phase eines Punktes im x_0-Schnitt und ψ die Phase im S-Schnitt, so transformiert sich die Trajektoriendichte gemäß:

$$n' = \frac{d\chi}{d\psi}\, n \tag{45}$$

wobei n' die Dichte in der S-Ebene ist. Die Hauptaufgabe besteht also darin, die Transformationsfunktion $d\chi/d\psi$ zu finden. Hierzu betrachten wir den durch die Dynamik in $\overline{T}$ gegebenen Zusammenhang

$$\chi = \psi + \frac{\omega}{\rho} \ln\left|\frac{x}{x_0}\right| \quad . \tag{46}$$

Damit wird

$$\frac{d\chi}{d\psi} = 1 + \frac{\omega}{\rho}\frac{d}{d\psi}\ln\left|\frac{x}{x_0}\right| = 1 + \frac{\omega}{\rho}\left(\frac{d}{dx}\ln\left|\frac{x}{x_0}\right|\right)\cdot\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^{-1} \quad . \tag{47}$$

Da

$$\psi(x) = \arctan\frac{\xi(x)}{\eta(x)} \tag{48}$$

ist, ergibt die Ableitung von ψ nach x

$$\frac{d}{dx}\,\psi(x) = \frac{\eta(x)\xi'(x) - \xi(x)\eta'(x)}{\eta(x)^2 + \xi(x)^2} \quad . \tag{49}$$

Hierin die aus den letzten Abschnitt bekannten Ausdrücke eingesetzt, liefert dann

$$\frac{d}{dx}\,\psi(x) = \frac{x(\rho+1) - \delta}{2\rho x\sqrt{r_0^2\left|\frac{x}{x_0}\right|^{-2/\rho} - \eta(x)^2}} \quad . \tag{50}$$

So erhalten wir als Endresultat

$$\frac{dx}{d\psi} = 1 + \frac{2\omega\sqrt{r_0^2\left|\frac{x}{x_0}\right|^{-2/\rho} - \eta(x)^2}}{x(\rho+1) - \delta} \tag{51}$$

Dies zeigt, daß für kleine x-Werte die Trajektoriendichte immer geringer wird.

4.4 Die Bilder der Geraden $\xi=0$

Wie schon im ersten Kapitel gezeigt wurde, läßt sich die implizite Gleichung (2.9a), die die Halbabbildungen beschreibt, nicht in ganz S geschlossen lösen. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels soll deshalb versucht werden, die Struktur der Halbabbildungen besser zu verstehen, indem wir uns näher ansehen, wohin die Scheitelpunkte $(\xi=0)$ der Schnittlinien $\Gamma(r_0)$ unter $\bar{P}$ abgebildet werden. Dabei soll auch eine neue Technik, die im nächsten Kapitel viele Anwendungen findet, eingeführt werden.

Betrachten wir den Strahl $\xi=0$ in $\bar{S}$, so lautet (2.9a) für den Punkt $(x,0)^T$:

$$x\cdot e^{-\rho\tau} + (\delta - x)\cdot e^{\tau}\cdot\cos\omega\tau = \delta \quad . \tag{52}$$

Auch diese vereinfachte Gleichung kann nicht für beliebige x nach τ aufgelöst werden, wohl aber in die andere Richtung. Interpretieren wir (52) so, daß für jede "Abbildungsdauer" τ ein x gesucht wird, welches diese Gleichung erfüllt, so wird einfach

$$x(\tau) = x_0\,\frac{\exp(\tau)\cos\omega\tau - 1}{\exp(\tau)\cos\omega\tau - \exp(-\rho\tau)} \tag{53}$$

Diese Funktion soll im folgenden näher untersucht werden. Zunächst ist für $\tau\to 0$ der Ausdruck unbestimmt, was in diesem Fall trivialerweise bedeutet, daß die Gleichung $x+2\eta=\delta$ erfüllt ist. Im anderen Extremfall, $\tau\to\infty$, strebt x für fast alle τ-Werte gegen x_0, also den Eintrittspunkt einer homoklinen Trajektorie, welche in der Tat den Steady State erst nach unendlicher "Zeit" wieder verläßt.

Da der Nenner von (53) Nullstellen besitzt, hat $x(\tau)$ eine Reihe von Polen, die für $\tau \to \infty$ äquidistant werden und gegen die Nullstellen von $\cos \omega\tau$ konvergieren. Auch die Nullstellen des Zählers konvergieren gegen diese Werte, jedoch nur bei $\tau=0$ tritt eine exakte Kompensation ein, was auf

$$x(0) = x_0 \frac{1}{\rho+1} = x_c \qquad (54)$$

führt.

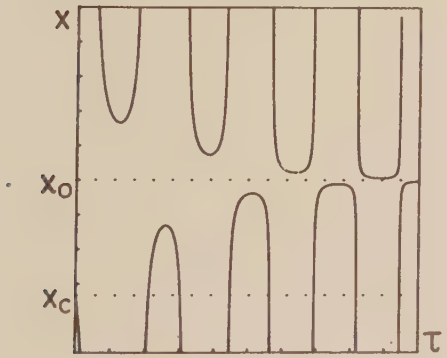


Abb. 11. Der Verlauf der Funktion $x(\tau)$ ist durch periodische Polstellen und Extrema, deren Werte gegen x_0 konvergieren, charakterisiert. Zur Abbildung $\bar{P}$ trägt jeweils nur das kleinste τ bei, bei dem ein x-Wert realisiert wird.
Parameter: $\rho = 2$, $\omega = 5$, $\delta = 1$.
Achsen: $\tau = 0 \,..\, 5$, $x = 0 \,..\, 2$.

Betrachten wir nun den gesamten Verlauf von $x(\tau)$ zur Interpretation der Halbabbildung $\bar{P}$. Zunächst einmal tragen alle x-Werte, die kleiner als x_c sind, nicht zu $\bar{P}$ bei, da diese Punkte nicht im Definitionsbereich der auf die Gerade $\xi=0$ eingeschränkten Abbildung liegen. Weiterhin besitzt jedes x (außer x_0) unendlich viele Urbilder; aber nur für den kleinsten po-

sitiven τ-Wert ist auch die Bedingung (2.9b) erfüllt. Alle anderen Lösungen müssen verworfen werden, da sich in diesen Fällen Trajektorien unter der in $\bar{T}$ wirkenden Dynamik in $\tilde{T}$ aufhalten.

Dieses Vorgehen, zunächst ohne Rücksicht auf die Bedingung (2.9b) alle möglichen Lösungen zu suchen, um dann daraus die richtige auszuwählen, wird sich auch in Zukunft als fruchtbar erweisen.

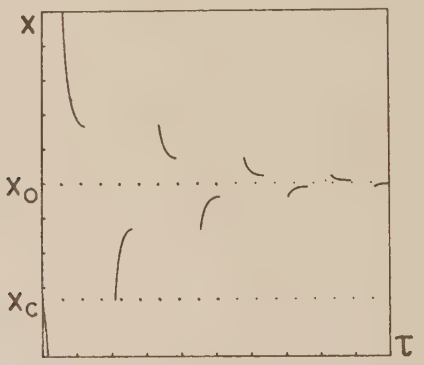


Abb. 12. Darstellung von $x(\tau)$, wobei nur die zur Halbabbildung $\bar{P}$ beitragenden Abschnitte gezeigt werden. Parameter und Achsen wie in Abb. 11.

Wird die Abbildung $x(\tau)$ durch die Bedingungen $x>x_c$ und (2.9b) eingeschränk, so ist deren hervorstechendes Merkmal der "durchlöcherte" Definitionsbereich. In einer (für große τ immer kleiner werdenden) Umgebung der Singularitäten von $x(\tau)$ lassen sich die Nebenbedingungen nicht erfüllen, d.h., gewisse τ-Werte werden von der Halbabbildung nicht benutzt. Dies liefert einen weiteren Hinweis auf Trennungsmechanismen, die in $\bar{P}$ wirksam sein müssen (und damit auch bei Parameterwerten mit

$\omega^2 < \rho+1$ chaotische Lösungen erlauben).

Die Lücken im Definitionsbereich von $x(\tau)$ beginnen oder enden jeweils an der Stelle eines Extremums der Funktion. Konkrete Berechnungen für die ersten Extrema zeigen, daß diese jeweils näher bei x_0 liegen als ihr Vorgänger. Die Situation für große τ-Werte beschreibt der folgende

Satz 8

Sei τ_n die Folge der Punkte an denen die Funktion $x(\tau)$ ein Extremum besitzt, dann konvergiert für große n die Folge

$$X_n := \left| x_0 - x(\tau_n) \right| \tag{55}$$

streng monoton gegen 0.

Beweis

Zunächst müssen die τ_n selbst bestimmt werden; hierzu wird die Ableitung von $x(\tau)$ nach τ benötigt

$$\frac{dx}{d\tau} = x_0 \left(\frac{z(-\rho)}{n} e^{-\rho\tau} + \frac{z(-\rho+1)}{n} e^{(-\rho+1)\tau} + \frac{z(1)}{n} e^{\tau} \right) \tag{56}$$

mit

$$z(-\rho) := \rho$$

$$z(-\rho+1) := \omega \sin\omega\tau - (\rho+1)\cos\omega\tau$$

$$z(1) := \cos\omega\tau - \omega\sin\omega\tau$$

und

$$n := (e^{\tau}\cos\omega\tau - e^{-\rho\tau})^2 \quad .$$

Da $\rho > 1$ ist, verschwinden für große τ die $e^{-(\rho-1)\tau}$- und $e^{-\rho\tau}$-Terme, so daß sich die Bedingung für die Nullstellen des Zählers von (56) zu

$$\cos\omega\tau_n = \omega\sin\omega\tau_n \tag{57}$$

reduziert. Damit wird

$$\tau_n' = \frac{1}{\omega}\left(\arctan\frac{1}{\omega} + n\pi\right) \tag{58}$$

wobei

$$\lim_{n\to\infty} |\tau_n' - \tau_n| = 0 \tag{59}$$

ist. Mit diesen τ_n' läßt sich eine Folge

$$X_n' := |x_0 - x(\tau_n')| \tag{60}$$

definieren, deren Elemente sich für große n beliebig wenig von denen der Foge X_n unterscheiden. Konkret ist

$$\begin{aligned} X_n' &= x_0 \left| \frac{1 - \exp(-\rho\tau_n')}{\exp(\tau_n')\cos\omega\tau_n' - \exp(-\rho\tau_n')} \right| \\ &= x_0 \left| \frac{1 - \exp\left(\frac{-\rho}{\omega}\arctan\frac{1}{\omega} + n\pi\right)}{\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+1}}\exp\left(\frac{1}{\omega}\arctan\frac{1}{\omega} + n\pi\right) - \exp\left(\frac{-\rho}{\omega}\arctan\frac{1}{\omega} + n\pi\right)} \right| \end{aligned} \tag{61}$$

Für große n können im Zähler und im Nenner jeweils die Terme mit $\exp(-\rho\tau_n)$ vernachlässigt werden, was auf

$$X_n'' = x_0 \frac{\sqrt{\omega^2+1}}{\omega} \exp\left(\frac{-1}{\omega}\arctan\frac{1}{\omega} + n\pi\right) \tag{62}$$

führt. Diese Folge hat nun die gewünschten Eigenschaften, ihre Elemente unterscheiden sich für große n beliebig wenig von den Elementen der Folge X_n und sie konvergiert streng monoton gegen x_0. ***

Die τ_n' aus (58) entsprechen für gerade n den ϕ_0 aus (3.7); dies bedeutet, daß für große "Abbildungszeiten" τ, wenn die Trajektorien praktisch auf die stabile Mannigfaltigkeit M_s relaxiert sind, fast alle Trajektorien, die auf der Gerade $\xi=0$ starten, die Sprungbedingung das erste Mal in ihrem u-Maximum erfüllen. Hier findet sich demnach die in Abschnitt 3.3 beschriebene Situation wieder. In diesem Bereich der Halbebene S^- um den homoklinoiden Punkt $h=(x_0,0)^T$ müssen somit chaotische Lösungen zu finden sein. In der Tat wird diese Vermutung durch ein Theorem von Shil'nikov [Shil 1965] bestätigt. Im nächsten Kapital soll allerdings ein anderer Weg eingeschlagen werden, der nicht nur das unendlich kleine Chaos um den Punkt h untersucht, sondern auch chaoserzeugende Strukturen endlicher Ausdehnung mit berücksichtigt.

5 Die kritische Spirale Y

Nachdem bis zu dieser Stelle die wichtigsten Voraussetzungen und Arbeitstechniken bereitgestellt wurden, soll im zentralen Kapitel der Arbeit die chaoserzeugende Struktur der Halbabbildung $\bar{P}$ Gegenstand der Untersuchung sein.

Eine notwendige Bedingung für chaotische Lösungen eines dynamischen Systems ist das Vorhandensein eines positiven Lyapunov Exponenten [Ru 1979; Fa 1982]. Für dreidimensionale Systeme - wie sie hier untersucht werden - ist dies auch die maximale Anzahl positiver Exponenten, da die Existenz eines Attraktors einen negativen Exponenten voraussetzt und (bei autonomen Systemen, wie sie hier untersucht werden) ein weiterer Exponent aufgrund der Translationsinvarianz im ϕ-Raum verschwindet.

Ein positiver Lyapunov Exponent ist Ausdruck dafür, daß sich Trajektorien mit benachbarten Anfangsbedingungen exponentiell voneinander entfernen. Dies kann kontinuierlich geschehen oder, wie im Fall stückweise linearer Systeme, durch eine Trennungseigenschaft der Halbabbildungen, wie sie prinzipiell im 3. Kapitel beschrieben wurde.

Benachbarte Trajektorien werden dadurch getrennt, daß die eine, deren u-Maximum bei $d+\varepsilon$ liegt, die Sprungbedingung erfüllt, während die andere mit einem u-Maximum von $d-\varepsilon$, die Sprungbedingung erst nach einem weiteren Umlauf um die instabile Mannigfaltigkeit erfüllen kann. Für die Halbabbildung $\bar{P}$ bedeutet dies, daß Urbildpunkte, die in S^- nahe beieinander liegen, in verschiedene Regionen von S^+ abgebildet werden. Ein Grenzfall tritt bei diesen Betrachtungen offensichtlich dann auf, wenn eine Lösung tangential zur Trennebene S verläuft, solche Trajektorien sollen "berührende Trajektorien" genannt werden.

5.1 Die Unterteilung der Geraden W

Alle Berührpunkte von Trajektorien mit der Trennebene S liegen definitionsgemäß auf der Geraden W (w=0). Dieser Geraden kommt eine Sonderrolle im Phasenraum zu, da sich dort keine lokale Lipschitzbedingung erfüllen läßt, also die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen nicht gesichert ist (s. z.B. [Hi,Sm 1974]). Dieses Problem kann allerdings, gerade wegen des tangentialen Verlaufs der Trajektorien, durch eine "Pointsplitting" Prozedur umgangen werden. Hierzu betrachten wir einen beliebigen Punkt x auf W als Grenzwert von zwei Funktionen $x^+(\tau) \in S^+$ und $x^-(\tau) \in S^-$, wobei x^- das Bild von x^+ unter der in $\bar{T}$ wirkenden Dynamik ist.

$$x^-(\tau) = \exp(\Lambda\tau)\, x^+(\tau) \qquad (1)$$

Für $\tau \to 0$ konvergieren dann die beiden Punkte $x^+(\tau)$ und $x^-(\tau)$ gegen x. Dieser Punkt ist also seinem Charakter nach sowohl Eintritts- als auch Austritts-Punkt für den Halbraum $\bar{T}$, wenn die "Verweildauer" der Trajektorie in $\bar{T}$ verschwindet.

Mit dieser Interpretation der Punkte von W sollen die beiden Halbabbildungen $\vec{P}$ und $\overleftarrow{P}$ auf dem Abschluß von S^+ bzw. S^- definiert werden. Dies führt dann dazu, daß W sowohl zum Urbild- als auch zum Bild-Bereich der Halbabbildungen gehört.

Betrachten wir den Trajektorienverlauf eines Systems in der Umgebung der Geraden W, so ist es unmittelbar einsichtig (vergl. Abb. 1), daß nur im Bereich einer negativen Krümmung des Flusses ($u''(\phi) < 0$) Trajektorien durch die Teildynamik in $\bar{T}$ getrennt werden können. Deshalb ist es von Interesse, diesen Ausschnitt von W zu bestimmen.

Ein (trivialer) Grenzpunkt kann sofort angegeben werden, er liegt bei $x=0$. Dies ist der Punkt, in dem sich die Geraden W und $\bar{\Sigma}$ schneiden, also W den Streifen S^0 (und damit den Definitionsbereich von $\vec{P}$) verläßt.

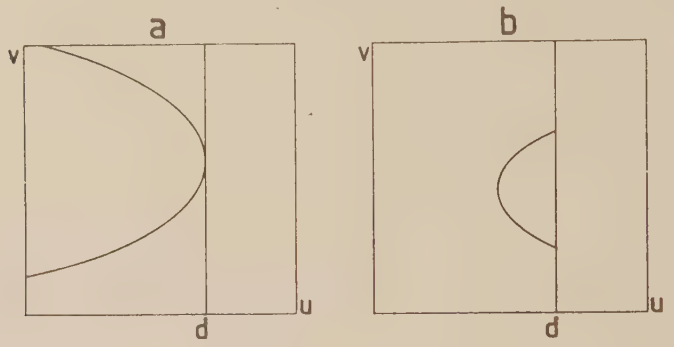


Abb. 1. Zwei Schnitte (parallel zur Ebene $w=0$) durch den Phasenraum. Im ersten Fall (a) ist $u''(\phi)<0$, damit können Trajektorien, die die Grenze nicht erreichen, ins Innere von $\bar{T}$ zurückkehren. Im anderen Fall (b) ist $u''(\phi)>0$, somit ist keine Trennung benachbarter Trajektorien möglich.

Zur Ermittlung des zweiten Grenzpunktes, bei dem ein Wechsel im Charakter des Flußes auftritt, benötigen wir einen Ausdruck für $u''(\phi)$ auf W.

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\, u(\phi) = \frac{d}{d\phi}\, w(\phi) = \rho^2\, x(\phi) + 2\mathrm{Re}\left[(1+i\omega)^2(\eta(\phi)+i\,\xi(\phi)\right] \quad . \quad (2)$$

Wird hierin $\eta(\phi)$ aus (1.27) und $\xi(\phi)$ aus (2.5) eingesetzt, so ergibt dies

$$\frac{d}{d\phi}\, w(\phi)\Big|_W = ((\rho+1)^2+\omega^2)x(\phi) - (\omega^2+1)\delta \qquad (3)$$

Die x-Komponente des zweiten Grenzpunkts kann durch Nullsetzen von (2) ermittelt werden.

$$x_w = x_o \frac{\omega^2 + 1}{(\rho+1)^2 + \omega^2} =: \Omega x_o \quad , \tag{4}$$

während die ξ-Komponente durch Einsetzen dieses Ausdrucks in (2.5) folgt.

Auch für diesen Punkt gilt das oben für den cartesischen Punkt gesagte: Eigentlich müßte seine ξ-Komponente immer mitgeschrieben werden, der Einfachheit halber wird aber meist die x-Komponente allein als Grenzpunkt x_w bezeichnet.

Prinzipiell kann x_w auch größer als $\tilde{X}$ sein; in diesem Fall tragen die noch zu betrachtenden Eigenschaften von x_w nicht zum Systemverhalten bei. Da aber $\tilde{X}$ ein Charakteristikum der Halbabbildung $\bar{P}$ ist, sollen bei der Untersuchung von $\bar{P}$ die Effekte dieses Punktes in allen Fällen mit berücksichtigt werden.

Die wichtige Beziehung zwischen x_w und x_c lautet

$$x_w = x_c \frac{(\omega^2+1)(\rho+1)}{(\rho+1)^2+\omega^2} \quad . \tag{5}$$

Als kleiner Exkurs sei hier die Frage gestellt, für welche Systeme diese beiden Punkte zusammenfallen. Die Bedingung hierfür hat die Form

$$(\rho+1)^2 + \omega^2 = (\omega^2+1)(\rho+1) \tag{6}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in $(\rho+1)$ mit den Lösungen

$$\rho + 1 = 1 \tag{7a}$$

und

$$\rho + 1 = \omega^2 \quad . \tag{7b}$$

Während die erste Lösung wegen der Bedingung $\rho>1$ ausgeschlossen werden muß, fällt die zweite mit der Grenze zwischen einfachen und komplizierten Isolae zusammen. Für Systeme, deren cartesisches Blatt nach S^+ reicht, ist also stets $x_W>x_C$. Damit liegt für solche Systeme der Punkt x_W auf einer Isola, während er im Fall $\omega^2<\rho+1$ stets auf einer Ω-Kurve liegt.

Zum Schluß dieses Abschnitts sei noch eine weitere interessante Größe ausgerechnet, r_W, das r_0, das die dynamische Mannigfaltigkeit, in der x_W liegt, festlegt.

$$\begin{aligned} r_W^2 &= \left[\eta\,(x_W)^2 + \xi\,(x_W)^2\right] \left|\frac{x_W}{x_0}\right|^{2/\rho} \\ &= \left[\frac{1}{4}\,(\delta - x_W)^2 + \left(\frac{\delta-(\rho+1)x_W}{2\omega}\right)^2\right] \left|\frac{x_W}{x_0}\right|^{2/\rho} \\ &= \eta_\infty^2 \Omega \left(\frac{\rho}{\omega}\right)^2 \left|\frac{x_W}{x_0}\right|^{2/\rho} \end{aligned}$$

Damit ist also

$$r_W = \eta_\infty \frac{\rho}{\omega} \left|\frac{x_W}{x_0}\right|^{(\rho+2)/2\rho} \quad . \tag{8}$$

Alle dynamischen Mannigfaltigkeiten, deren $r_0<r_W$ ist, können also ihre Trajektorien durch einen Dynamikwechsel trennen, während solche mit $r_0>r_W$ von der Trennungseigenschaft nichts bemerken.

Zusammenfassend kann die Gerade W in drei Abschnitte unterteilt werden:

$x<0$, $x>\tilde{X}$: Diese beiden Abschnitte sind für das Systemverhalten uninteressant, da sie nicht im Innern von S^0 liegen.

$0<x<x_w$: In diesem Bereich können benachbarte Trajektorien getrennt werden.

$x>x_w$: Hier liegt keine Trennungseigenschaft mehr vor, diese Punkte sind (instabile) Fixpunkte der Gesamtabbildung P (vergl. Abb. 1).

5.2 Die kritische Spirale im x_0-Schnitt

Der erste Abschnitt dieses Kapitels zeigte, daß den Eintrittspunkten der berührenden Trajektorien in $\bar{T}$ eine besondere Rolle für die Abbildung $\bar{P}$ zukommt, da Trajektorien, die an dazu benachbarten Punkten starten, durch die Dynamik in $\bar{T}$ getrennt werden können. Dies ist der für die Chaosentstehung verantwortliche Trennungsmechanismus. Es ist deshalb von Interesse, die Ortskurve aller dieser kritischen Punkte zu untersuchen, da jeder dieser Punkte eine Unstetigkeitsstelle der Abbildung $\bar{P}$ ist, und die Vereinigung dieser Punkte somit einen Verzweigungsschnitt in S^- bildet.

Wie wir aus dem letzten Kapitel wissen, häufen sich die Schnittpunkte der kritischen Kurve mit der Geraden $\xi=0$ an dem homoklinoiden Punkt h. Dies legt die Vermutung nahe, daß es sich bei der kritischen Kurve um eine Spirale handelt.

Im ersten Schritt sollen jedoch nicht die eigentlichen Eintrittspunkte der berührenden Trajektorien in S^-, sondern die dazu äquivalenten Punkte in der Ebene $x=x_0$ untersucht werden.

Um die Durchtrittspunkte einer berührenden Trajektorie durch die Ebene $x=x_0$ bestimmen zu können, muß zunächst der Berührpunkt, der diese Trajektorie charakterisiert, gefunden werden. Die Beschreibung erfolgt dabei in der, aus dem letzten Kapitel bekannten, geometrischen x-Darstellung. Für den Extremfall $x=0$ wurde bereits im 3. Kapitel gezeigt, daß der Berührpunkt die Phase $\psi_{ob}=\arctan 1/\omega$ besitzt. Diese Formel soll nun auf beliebige $x\in[0,x_w)$ erweitert werden.

Die Bedingungen für einen Berührpunkt sind, daß die u-Komponente der Trajektorie in homogenen Koordinaten den Wert δ annimmt und an dieser Stelle ein Maximum besitzt:

und

$$\begin{aligned} u(x) &= x + 2\eta(x) &&= \delta \\ w(x) &= -\rho x + 2(\eta(x) - \omega\xi(x)) &&= 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

Aus der ersten Gleichung folgt das bekannte

$$\eta(x) = \frac{\delta - x}{2} \quad ,$$

während der zweite Ausdruck

$$\xi(x) = \frac{1}{2\omega}\,(\delta - (\rho+1)x) \qquad (10)$$

liefert. In den, in (4.7) eingeführten, "Zylinderkoordinaten" kann nun die Phase des Berührpunktes bestimmt werden

$$\tan\psi_b(x) = \frac{\xi(x)}{\eta(x)}$$

$$\psi_b(x) = \arctan\left[\frac{1}{\omega}\,\frac{\delta - (\rho+1)x}{\delta - x}\right] \qquad (11)$$

Dies zeigt, wie für $x>0$ eine zusätzliche Phasenverschiebung des Maximums gegenüber einer flachen Trajektorie (bei $x=0$; dies ist die im 3. Kapitel behandelte Spirale) beobachtet wird.

An der Stelle des Maximums der u-Komponente läßt sich der aktuelle Radius r der Trajektorie einfach bestimmen.

$$r(x) = \sqrt{\eta(x)^2 + \xi(x)^2} = \frac{\eta(x)}{\cos\psi_b(x)} \qquad (12)$$

Diese Resultate müssen nun, via $x=x_0\exp(-\rho\phi)$, in die x_0-Ebene übertragen werden. Dabei erhalten wir (vergl. Gl. 4.7)

und

$$\gamma_b(x) = \psi_b(x) + \frac{\omega}{\rho} \ln\left|\frac{x}{x_0}\right|$$

$$r_0(x) = \frac{\eta_\infty}{\cos\psi_b(x)} \frac{x_0 - x}{x_0} \left|\frac{x}{x_0}\right|^{1/\rho} \qquad (13)$$

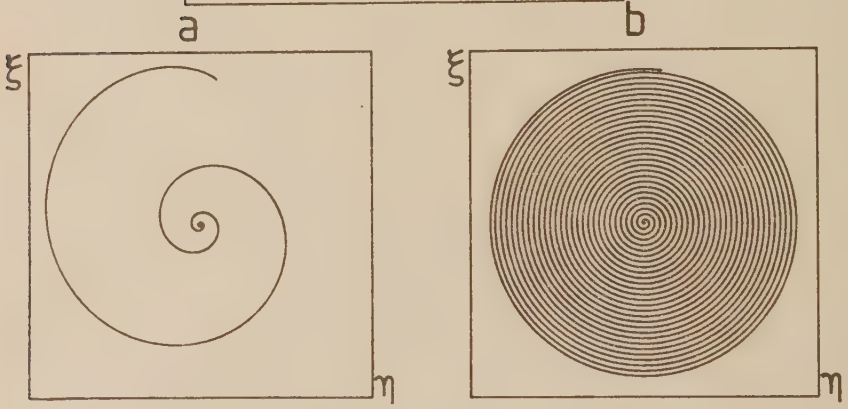


Abb. 2. Die kritische Spirale γ im x_0-Schnitt.
(a) zeigt die Spirale in der Darstellung von Gleichung (13).
Achsen: η =-0.2 .. 0.2, ξ = -0.2 .. 0.2.
In (b) ist der Radius R durch $\ln(R/10^{-20})$ ersetzt. Man beachte den gleichmäßigen Abstand der inneren Windungen, der auf die Verwandtschaft zu einer logarithmischen Spirale schließen läßt.
Achsen: η = -50 .. 50, ξ = -50 .. 50.
Parameter: ρ = 2, ω = 4, δ = 1.

Damit liegt ein analytischer Ausdruck für die kritische Spirale γ vor. Dieses Ergebnis läßt sich zwar nicht ohne weiteres in die S-Ebene transformieren, zeigt aber bereits alle wichtigen Eigenschaften, die sich auch in **S** wiederfinden werden. Die Diskussion dieser für $\bar{P}$ entscheidenden Eigenschaften soll erst erfolgen, wenn die Darstellung von γ auch in **S** gefunden ist; hier sollen zunächst Anwendungen vorgestellt werden, die sich im wesentlichen auf Gleichung (11) stützen.

5.2.1 Die korrespondierende berührende Trajektorie

Bei der Berechnung einer konkreten Trajektorie - etwa durch iterierte Lösung von (2.9a) - ist die Erfüllung der Bedingung (2.9b), die die erste Nullstelle von (2.9a) fordert, ein kritischer Punkt. Dies wird daran deutlich, daß für alle üblichen numerischen Verfahren zum Auffinden von Nullstellen der Konvergenzradius der Methode in der Nähe der Geraden W sehr klein wird und auf dieser Geraden selbst (für berührende Trajektorien) sogar verschwindet. Andererseits ist eben dieser Extremfall analytisch faßbar und kann ein Kriterium dafür liefern, ob (2.9b) erfüllt ist. Betrachten wir hierzu eine beliebige Trajektorie, die in der x_o-Ebene die Phase χ besitzt. Das Ziel ist es, diese Trajektorie dann mit einer berührenden Trajektorie zu vergleichen, wenn beide bei gleichem x-Wert die Phase $\psi_b(x)$ (vergl. Gl. 11) haben. Deshalb soll x hier als Funktion der Phase dargestellt werden

$$x(\psi) = x_o \exp\left[\frac{-\rho}{\omega}(\psi-\chi)\right] \tag{14}$$

dann ist

$$\frac{d}{d\psi} x(\psi) = \frac{-\rho}{\omega} x(\psi) \tag{15}$$

Wird dieses $x(\psi)$ nun in Gleichung (11) eingesetzt, so ergibt die Forderung nach Phasengleichheit

$$\boxed{\psi = \psi_b(\psi) = \arctan\left(\frac{1}{\omega}\cdot\frac{\delta-(\rho+1)x(\psi)}{\delta-x(\psi)}\right)} \tag{16}$$

Dies ist eine Fixpunktgleichung für ψ, die iterativ gelöst werden kann.

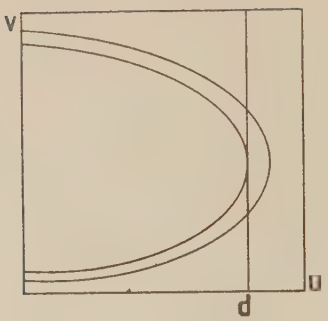


Abb. 3. Schematische Darstellung einer beliebigen Trajektorie und der dazu korrespondierenden berührenden Trajektorie bei Projektion in die Ebene $x=x_b$.

Eine Aussage über die lineare Stabiltät des Fixpunkts von Gleichung (16) liefert die Ableitung von ψ_b nach ψ am Fixpunkt $\bar{\psi}$. Da dieser aber unbekannt ist, soll hier eine Abschätzung für diese Ableitung vorgestellt werden.

$$\frac{d\psi_b}{d\psi} = \left[1+\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\delta-(\rho+1)x(\psi)}{\delta-x(\psi)}\right)^2\right]^{-1} \cdot \left(\frac{\rho}{\omega}\right)^2 \frac{\delta\, x(\psi)}{(\delta-x(\psi))^2} \qquad (17)$$

Für $x\to 0$ verschwindet die Ableitung und $\psi_{ob}=\arctan 1/\omega$ ist ein superstabiler Fixpunkt von (16). Am anderen Ende der Skala, für $x\to\delta$, strebt $d\psi_b/d\psi$ von oben gegen 1, was bedeutet, daß (16) auch instabile Fixpunkte besitzen kann. Die Stabilitätsgrenze, die durch $|d\psi_b/d\psi|=1$ gegeben ist, liegt bei

$$x_g = x_b \frac{\omega^2+1}{(\rho+1)^2+\omega^2} = x_w \qquad (18)$$

wie sich durch Einsetzen in (17) ergibt. Da berührende Trajektorien nur im Intervall $(0,x_w)$ existieren, sind somit alle interessierenden Fixpunkte $\bar{\psi}$ von (16) auch stabil!

Nachdem der Fixpunkt bestimmt ist, kann der Radius der Testtrajektorie am Fixpunkt $r(\bar{\psi})$ mit dem der berührenden Trajektorie $r_b(\bar{\psi})$ verglichen werden. Ist $r(\bar{\psi}) > r_b(\bar{\psi})$, so hat die Trajektorie die Grenze $u = \delta$ bereits überschritten und die Sprungstelle muß bei Phasen gesucht werden, die kleiner als $\bar{\psi}$ sind. Diese Überprüfung ist besonders wichtig, da in der Nähe einer berührenden Trajektorie die Fehler, die beim numerischen Auffinden der ersten Lösung von (2.9a) auftreten, dazu führen können, daß die Sprungbedingung einen vollen Umlauf der Trajektorie um die instabile Mannigfaltigkeit zu früh oder zu spät erkannt wird.

5.2.2 Die Länge der kritischen Spirale

Eine weitere interessante Größe ist die Länge der kritischen Spirale im x_0-Schnitt.

Um eine einfache Formulierung zu erreichen, gehen wir wieder von der x- in die ϕ-Darstellung über. Dort ist die Länge durch

$$\mathcal{L} = \left| \int_{\phi_W}^{\infty} L(\phi)\, d\phi \right| = \left| \int_{\phi_W}^{\infty} r_o(\phi)\, \frac{d\chi}{d\phi}\, d\phi \right| \tag{19}$$

gegeben, wobei

$$\phi_W = \frac{-1}{\rho} \ln \left| \frac{x_W}{x_0} \right| \tag{20}$$

der ϕ-Wert ist, bei dem die in der x_0-Ebene startenden Trajektorien auf dem x_W-Niveau angekommen sind. χ ist die Phase der berührenden Trajektorie in der x_0-Ebene (vergl. Gl. 13).

In dieser Darstellung hat Υ die folgende Form

$$\psi_b(\phi) = \arctan\left[\frac{1}{\omega}\left(1 - x_0\frac{\exp(-\rho\phi)}{1-\exp(-\rho\phi)}\right)\right]$$

$$\chi_b(\phi) = \psi_b(\phi) - \omega\phi \qquad (21)$$

$$r_0(\phi) = \frac{\eta_\infty}{\cos\psi_b(\phi)}\,(1 - e^{-\rho\phi})\,e^{-\phi}$$

Daraus ergibt sich für die Länge $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \int_{\phi_w}^{\infty}\left|\eta_\infty(1-e^{-\rho\phi})e^{-\phi}\,\frac{\sqrt{\Delta(\phi)}}{\omega(\delta - x(\phi))}\left[\frac{\rho^2\omega\delta x(\phi)}{\Delta(\phi)} - \omega\right]d\phi\right| \qquad (22)$$

mit

$$\Delta(\phi) = \omega^2(\delta - x(\phi))^2 + (\delta - (\rho+1)x(\phi))^2 \qquad (23)$$

Dieses Integral kann nicht in geschlossener Form gelöst werden. Wenn aber die Relaxationskonstante ρ hinreichend groß ist, dann relaxieren alle Trajektorien - und damit auch die berührenden Trajektorien - schnell in die Nähe der Ebene $x=0$, weshalb eine Entwicklung des Integrals um $x=0$ $(\phi=\infty)$ möglich wird.

Eine Entwicklung der einzelnen Faktoren des Integranden bis zur linearen Ordnung in x/x_0 ergibt

$$L(\phi) = \eta_\infty e^{-\phi}\,\frac{x_0 - x(\phi)}{x_0}\left[\frac{\sqrt{\omega^2+1}}{\omega}\left(1 - \frac{\rho\,x(\phi)}{(\omega^2+1)x_0}\right)\right] * \omega\left[\frac{\rho^2\,x(\phi)}{(\omega^2+1)x_0} - 1\right] + O\left[\left(\frac{x(\phi)}{x_0}\right)^2\right] \qquad (24)$$

Um die Integration übersichtlicher zu gestalten, soll der Integrand nach Potenzen von $x(\phi)/x_0$ geordnet werden.

$$L_0(\phi) = -\frac{\omega\eta_\infty}{\cos\psi_{0b}}\,e^{-\phi}$$

$$L_1(\cdot) = \frac{\omega\eta_\infty}{\cos\psi_{ob}} e^{-(\rho+1)\phi} \frac{(\rho+1)^2+\omega^2}{\omega^2+1} \qquad (25)$$

$$L(\phi) = L_0(\phi) + L_1(\phi)\frac{x(\phi)}{x_0} + O\left[\left(\frac{x(\phi)}{x_0}\right)^2\right]$$

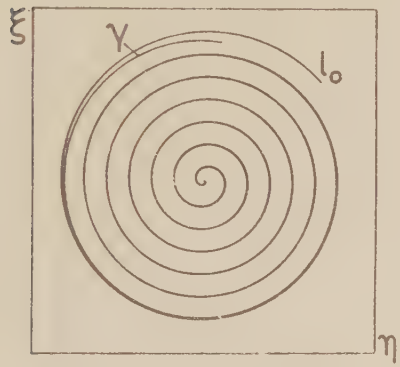


Abb. 4. Vergleich der exakten kritischen Spirale γ im x_0-Schnitt und der Approximation durch l_0 in der logarithmischen Darstellung analog zu Abb. 2b, jedoch mit der Radiusfunktion $\ln(R/10^{-5})$. Dabei fällt besonders auf, daß die beiden Spiralen verschiedene Startphasen besitzen ($\psi_b(x_w) \neq \psi_{ob}$). Der, sogar in der vorliegenden logarithmischen Darstellung, kleiner werdende Abstand zwischen den Spiralen zeigt, wie gut bereits diese Näherung ist.
Parameter: $\rho = 2$, $\omega = 4$, $\delta = 1$.
Achsen: $\eta = -12 \ldots 12$, $\xi = -12 \ldots 12$.

Damit ergibt sich das folgende Bild der kritischen Spirale: Im wesentlichen handelt es sich dabei um eine logarithmische Spirale der Form $\eta_\infty/\cos\psi_{ob}\ e^{(1+i\omega)\phi}$; dieser Anteil wird durch $l_0 = L_0/\omega$ beschrieben. Darüber hinaus treten Störungen in Amplitude und Frequenz auf, die durch l_1, l_2 etc. beschrieben werden und jeweils um einen Faktor $e^{-\rho\phi}$ schneller abklingen als der vorangehende Term. Diese Störungen haben zwei Ursachen. (1) Der aktuelle Spiralradius muß gegenüber dem Idealfall (x=0) um den Faktor (1-x) korrigiert werden und (2), da ψ_b nicht kon-

stant ψ_{ob} ist, erhält die Phasengeschwindigkeit, die in erster Näherung einfach ω ist, einen additiven Zusatzterm und der Spiralradius eine weitere Korrektur im "$1/\cos\psi_b$"-Faktor.

In einer Störungsentwicklung bis zur ersten Ordnung in $x(\phi)/x_o$ kann die Integration in (22) nun geschlossen ausgeführt werden. Damit hat die kritische Spirale die Länge

$$\mathcal{L} = \frac{\omega\eta_\infty}{\cos\psi_{ob}} \exp(-\phi_w) - \frac{(\rho+1)^2+\omega^2-\rho}{\omega^2+1} \exp(-(\rho+1)\phi_w$$
$$= \frac{\omega\eta_\infty}{\cos\psi_{ob}} \left(\frac{\omega^2+1}{(\rho+1)^2+\omega^2}\right)^{1/\rho} \left[1 + \frac{\rho}{(\rho+1)^2+\omega^2}\right] \qquad (26)$$

5.2.3 Die Extrema der kritischen Spirale

Nachdem im letzten Abschnitt das Verhalten der kritischen Spirale bei großen ϕ-Werten (also für die inneren Windungen) untersucht wurde, soll hier das Verhalten in der äußersten Windung untersucht werden, speziell der Radius von $\mathcal{Y}$.

Der Radius der kritischen Spirale im x_o-Schritt ist durch (13) gegeben. Nach einer elementaren Umformung und Einsetzen des Ausdrucks für x_b wird daraus

$$r(x) = \frac{\eta_\infty}{\omega\delta}\sqrt{\omega^2(\delta-x)^2+(\delta-(\rho+1)x)^2}\left|\frac{x}{x_o}\right|^{1/\rho} \qquad (27)$$

Da $r_o \in \mathbb{R}^+$ ist, sind alle Extrema von r_o auch Extrema des Quadrats von r_o

$$r_o(x)^2 = \frac{\eta_\infty^2}{\omega^2}\left|\frac{x}{x_o}\right|^{2/\rho}\left[\left(\frac{x}{x_o}\right)^2(\omega^2+(\rho+1)^2) - 2\frac{x}{x_o}(\omega^2+\rho+1)+\omega^2+1\right] \qquad (28)$$

Die Ableitung von r_0^2 wird somit

$$\frac{d}{dx} r_0(x)^2 = \frac{n_\infty}{\omega^2 \rho} \left| \frac{x}{x_0} \right|^{(2-\rho)/\rho} R(x) \qquad (29)$$

mit

$$R(x) = \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 (\rho+1)(\omega^2+(\rho+1)^2) - \frac{x}{x_0}(\rho+2)(\omega^2+\rho+1) + \omega^2 + 1 \qquad (30)$$

für $x>0$ kann nur die Funktion R Nullstellen besitzen, somit nimmt an diesen Nullstellen der Radius r_0 seine Extremwerte an.

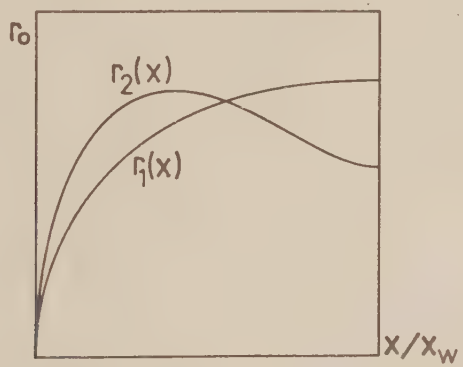


Abb. 5. Darstellung des Radius der kritischen Spirale im x_0-Schnitt als Funktion von x/x_w für zwei verschiedene Systeme.
(1) $\rho = 2$, $\omega = 1$, $\delta = 1$; d.h., $\omega^2 < \rho + 1$, somit ist der Funktionsverlauf monoton.
(2) $\rho = 2$, $\omega = 5$, $\delta = 1$; d.h., $\omega^2 > \rho + 1$. Hier wächst der Radius zunächst, nimmt bei x_c/x_w ein Maximum an und fällt dann wieder.
Achsen: $x/x_w = 0 \,..\, 1$, $r_0 = 0 \,..\, 0.25$.

R ist quadratisch in x/x_0, womit sich die Nullstellen dieser Funktion unmittelbar bestimmen lassen:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)_{1/2} = \frac{1}{2q(\rho,\omega)}\left[(\rho+2)(\omega^2+\rho+1) \pm \sqrt{W(\rho,\omega)}\right] \tag{31}$$

mit

$$q(\rho,\omega) = (\rho+1)(\omega^2+(\rho+1)^2) \tag{32}$$

und

$$W(\rho,\omega) = (\rho+2)^2(\omega^2+\rho+1) - 4(\omega^2+1)\, q(\rho,\omega) \tag{33}$$
$$= \rho^2(\rho+1-\omega^2)^2$$

Damit sind die Nullstellen (x_1, x_2) von R gefunden

$$x_1 = x_0 \frac{\rho\omega^2+2\rho+\omega^2+1}{(\rho+1)(\omega^2+(\rho+1)^2)}$$
$$= x_0 \frac{1}{\rho+1}$$
$$= x_c \tag{34}$$

und weiter ist

$$x_2 = x_0 \frac{\rho\omega^2+\omega^2+\rho+1}{(\rho+1)(\omega^2+(\rho+1)^2)}$$
$$= x_0 \frac{\omega^2+1}{(\rho+1)^2+\omega^2}$$
$$= x_w \tag{35}$$

Die Extrema des Radius der kritischen Spirale liegen demnach an den wohlbekannten Stellen x_c und x_w! Dabei ist zu beachten, daß das Extremum bei x_c nur dann realisiert wird, wenn x_c auch im Definitionsbereich von Υ liegt, d.h., wenn $x_c < x_w$ ist oder $\omega^2 > \rho+1$. Mit dem Maximum des Radius der kritischen Spirale sind auch alle dynamischen Mannigfaltigkeiten bekannt, die von dieser geschnitten und damit beeinflußt werden.

Der Charakter der beiden gefundenen Extrema folgt aus dem Vorzeichen der zweiten Abteilung von r_0.

$$\frac{d^2}{dx^2} r_0(x)^2 = \frac{2\eta_\infty}{\omega^2\rho}\left|\frac{x}{x_0}\right|^{-2(\rho-1)/\rho}\left[R(x) + \frac{x}{x_0}\frac{d}{dx}R(x)\right] \qquad (36)$$

Da der Vorfaktor für $x>0$ positiv ist und R an den Stellen x_c und x_w verschwindet, reicht es aus, das Vorzeichen von dR/dx an diesen Stellen zu bestimmen.

$$V(x) = \frac{d}{dx}R(x) = \frac{1}{x_0}\left[2\frac{x}{x_0}(\rho+1)(\omega^2+(\rho+1)^2)-(\rho+2)(\omega^2+\rho+1)\right] \qquad (37)$$

Somit erhalten wir an der Stelle $x=x_c$

$$V(x_c) = \frac{1}{x_0}\left[2(\omega^2+(\rho+1)^2)-(\rho+2)(\omega^2+\rho+1)\right]$$

$$= \frac{1}{x_0}(\rho+1-\omega^2) \qquad (38)$$

r_0 besitzt demnach an der Stelle x_c ein Maximum, falls $x_w > x_c$ ist. Fallen diese beiden Punkte zusammen, so verschwindet auch die zweite Ableitung von r_0 und die Radiusfunktion hat an dieser Stelle eine waagerechte Wendetangente.

Weiterhin ist

$$V(x_w) = \frac{1}{x_0}\left[2(\omega^2+1)(\rho+1)-(\rho+2)(\rho+1)\right]$$

$$= \frac{1}{x_0}(\omega^2-\rho-1)$$

$$= -V(x_c) \qquad (39)$$

Hier hat die zweite Ableitung also gerade das umgekehrte Vorzeichen.

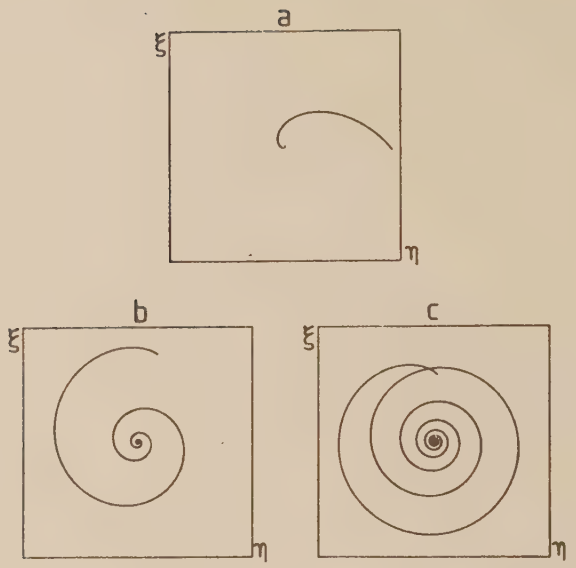


Abb. 6. Die drei Typen kritischer Spiralen im x_0-Schnitt.
(a) ist $\omega^2<\rho+1$, so nimmt der Spiralradius streng monoton zu.
Parameter: $\rho = 5$, $\omega = 1$, $\delta = 1$.
(b) ist ω^2 nur wenig größer als $(\rho+1)$, so nimmt der Radius in der äußersten Windung zwar wieder ab, γ kann sich aber nicht selbst schneiden.
Parameter: $\rho = 5$, $\omega = 5$, $\delta = 1$.
(c) wird ω^2 aber wesentlich größer als $(\rho+1)$, so kann die Spirale sich auch (mehrmals) selbst schneiden.
Parameter: $\rho = 5$, $\omega = 10$, $\delta = 1$.
Achsen: $\eta = -0.35 \,..\, 0.35$, $\xi = -0.35 \,..\, 0.35$.

An dieser Stelle (x_w) endet der Definitionsbereich der kritischen Spirale, wobei r_0 ein Extremum annimmt; dies ist ein lokales Minimum, falls $\omega^2>\rho+1$ ist, andernfalls handelt es sich um ein globales Maximum der Radiusfunktion. In diesem Ergebnis zeigt sich nochmals die Symmetrie der Situation. Falls in einem System nur einfache Isolae existieren, also $\rho+1>\omega^2$ ist, wächst

γ aus dem Punkt h heraus und der Radius der kritischen Spirale steigt für alle x aus dem Definitionsbereich $(0,x_w)$ streng monoton an. Dies ist die Situation, für welche die im letzten Abschnitt beschriebene Störungsentwicklung gute Ergebnisse liefert.

Ist $\omega^2>\rho+1$, so wächst der Spiralradius nur bis zum Punkt x_c um danach wieder abzunehmen. Dies eröffnet die Möglichkeit, daß die kritische Spirale sich selbst schneidet, was erhebliche Konsequenzen für die Halbabbildung $\bar{P}$ hat. In beiden Fällen endet der Definitionsbereich von γ bei x_w mit einer verschwindenden Ableitung der Radiusfunktion. Für den Grenzfall $\omega^2=\rho+1$ fallen x_w und x_c und damit auch das Minimum und das Maximum der Radiusfunktion zusammen (vergl. Abb. 5).

Hier deutet sich an, daß zusätzlich zu den Komplikationen, die das Vorhandensein der kritischen Spirale für die Dynamik bedeuten, diese selbst eine komplizierte Dynamik aufweisen kann. Die Dynamik von γ wird in den nächsten Abschnitten quasi als Nebenprodukt herausgearbeitet werden.

5.3 Die kritische Spirale in S

Wenn auch die Darstellungen der kritischen Spirale im x_0-Schritt und in S äquivalent sind (diese Äquivalenz wird später noch schärfer gefaßt), so hat doch jede dieser Darstellungen ihre spezifischen Vorteile. Während sich in der Ebene $x=x_0$ die dynamischen Mannigfaltigkeiten als konzentrische Kreise zeigen, also allein durch ihren Radius r_0 charakterisiert werden, haben die statischen Strukturen und die dadurch gewonnene Einteilung der dynamischen Mannigfaltigkeiten in dieser Ebene keine adäquate Darstelung. Diese statischen Strukturen sind aber in S einfach Geraden. Aus diesem Grunde ist es sinnvoll, die kritische Spirale auch in S zu formulieren.

Leider ist eine punktweise Transformation der im x_0-Schritt gewonnenen Resultate nach S nicht möglich, da hierfür zu (2.9a) äquivalente Gleichungen gelöst werden müßten. Deshalb soll an dieser Stelle eine andere Technik, die ansatzweise bereits im 4. Kapitel beschrieben wurde, benutzt werden.

5.3.1 Kurven gleicher "Abbildungsdauer"

Die Sprungbedingung (2.9a) besitzt in $\mathbb{R}^+$ unendlich viele Lösungen, von denen durch (2.9b) die erste, für die Halbabbildung $\bar{P}$ relevante, Lösung selektiert wird. Bei allen anderen Lösungen hält sich die zugehörige Trajektorie unter der in $\bar{T}$ wirkenden Dynamik, "unerlaubterweise" im anderen Halbraum $\tilde{T}$ auf, benutzt also einen für diese Dynamik "verbotenen" Bereich des Phasenraums.

Eine berührende Trajektorie nimmt bei dieser Betrachtung eine Sonderstellung ein, da sie am Berührpunkt zwar die Sprung-

bedingung erfüllt, danach aber $\tilde{T}$ nur während eines ϕ-Intervalls der Länge 0 benutzt. Genau diese Eigenschaft soll zur Darstellung der kritischen Spirale ausgenutzt werden.

Hierfür lösen wir die Gleichung (2.9a) nach ξ auf.

$$\xi_\tau(x) = \sigma(\tau)x - \eta_\infty \frac{e^{-\tau} - \cos\omega\tau}{\sin\omega\tau} \tag{40}$$

mit

$$\sigma(\tau) = \frac{e^{-(\rho+1)\tau} - \cos\omega\tau}{2\sin\omega\tau} \tag{41}$$

Diese Geraden $\xi_\tau(x)$ sind Kurven gleicher Abbildungsdauer, da jeder Punkt darauf Startpunkt für eine Trajektorie ist, die nach der "Zeit" τ die Sprungbedingung erfüllt.

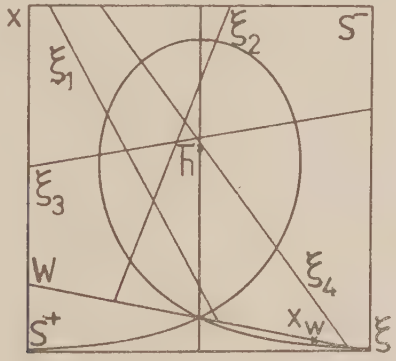


Abb. 7. Vier Beispiele für den Verlauf von $\xi_\tau(x)$ in S^- mit $\tau = 1, 2, 3$ und 4.
Parameter: $\rho = 5$, $\omega = 5$, $\zeta = 1$.
Achsen: $\xi = -0.5 \,..\, 0.5$, $x = 0 \,..\, 1.7$.

Hier können wir nun als kleinen Exkurs den Grenzfall $\tau \to 0$ betrachten, (40) liefert in diesem Fall für ξ_τ einen unbestimmten Ausdruck der Form "0/0" bei allen x-Werten. Dieser Ausdruck läßt sich jedoch nach l'Hospital regularisieren.

$$\lim_{\tau \to 0} \xi_\tau(x) = \xi_0(x) = -x \frac{\rho+1}{2} + \frac{\eta_\infty}{\omega} \qquad (42)$$

Hier finden wir, wie nicht anders zu erwarten war, die Gleichung für die Gerade W (vergl. Gl. 2.5) wieder.

Für die weiteren Nullstellen des Nenners von ξ_τ, die bei

$$\tau_n^0 = \frac{n\pi}{\omega}, \quad n=2,3... \qquad (43)$$

liegen, ist die Singularität nicht mehr hebbar. Die Funktion ξ divergiert allerdings nicht, sondern liefert einen zu allen Ordnungen unbestimmten Ausdruck, falls der Zähler der Funktion auch verschwindet, dies geschieht für

$$x_n^0(\exp(-(\rho+1)\tau_n^0) - \cos\omega\tau_n^0) = 2\eta_\infty(1 - \exp(\tau_n^0)\cos\omega\tau_n^0)$$

$$x_n^0 = x_0 \frac{1 - (-1)^n \exp(\tau_n^0)}{\exp(-\rho\tau_n^0) - (-1)^n \exp(\tau_n^0)} \qquad (44)$$

bei diesen x-Werten ist $\xi_{\tau_n^0}$ unbestimmt, es handelt sich dabei um Geraden, die parallel zu x=0 verlaufen.

Nun sind alle Voraussetzungen geschaffen, um das oben angedeutete Programm zur Berechnung der kritischen Spirale durchzuführen. Betrachten wir dazu zwei Geraden ξ_τ und $\xi_{\tau'}$ mit

$$0 < \tau < \tau' \quad , \qquad (45)$$

die sich im Punkt $s(\tau,\tau')$ in S schneiden mögen, wobei τ die erste und τ' die zweite Lösung der Sprungbedingung (2.9a) sind. Die zu $s(\tau,\tau')$ gehörige Trajektorie befindet sich also für ein Intervall der Länge

$$\Delta\tau := \tau' - \tau \qquad (46)$$

"unerlaubterweise" in $\tilde{\tau}$.

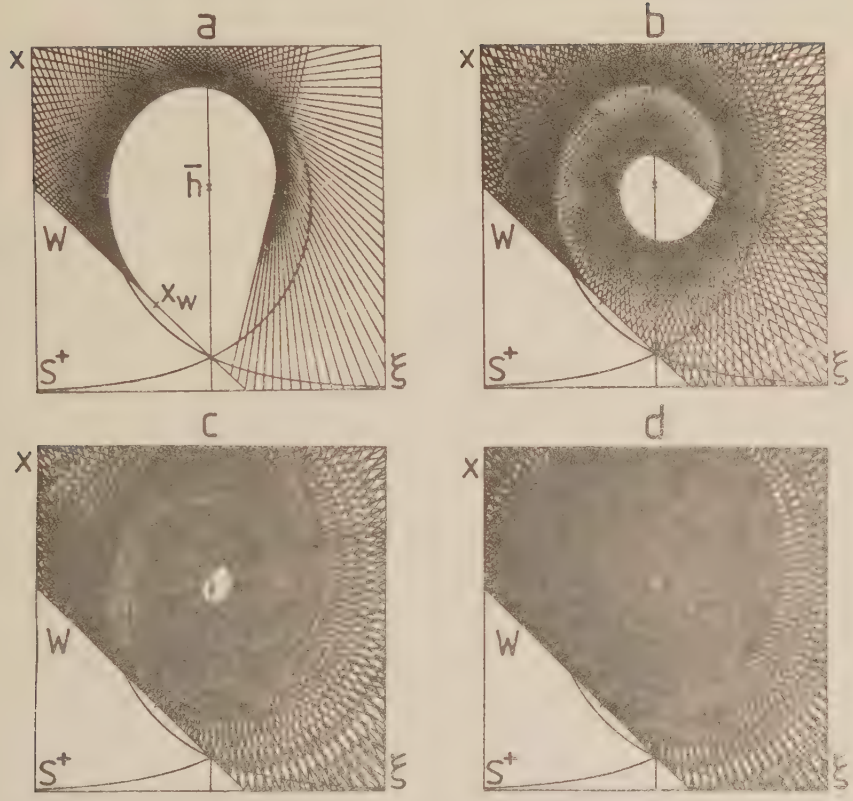


Abb. 8. Die Geraden ξ_τ in S^- für die τ-Intervalle (0,1), (0,2), (0,3) und (0,4) in Schritten von $\Delta\tau = 0.01$. Durch das kleine $\Delta\tau$ liegen die Schnittpunkte benachbarter Geraden fast auf der kritischen Spirale.
Parameter: $\sigma = 5$, $\vartheta = 5$, $\delta = 1$.
Achsen: ξ -0.5 .. 0.5, x 0 .. 1.7.

Für $\Delta\tau \to 0$ konvergiert, nach dem oben (Abschnitt 5.1) Gesagten, die zu $s(\tau,\tau')$ gehörige Trajektorie gegen eine berührende Trajektorie und somit $s(\tau,\tau')$ gegen einen Punkt x_τ von γ. Die Spirale soll also durch die Konstruktion aller Berührpunkte mit den Geraden ξ_τ gefunden werden.

Die Schnittbedingung für die beiden Geraden ξ_τ und $\xi_{\tau'}$ liefert einen Ausdruck für den Punkt x_τ, der für $\Delta\tau \to 0$ zu einem Berührpunkt wird.

$$\xi_\tau (x_\tau) = \xi_{\tau'}(x_\tau) \tag{47}$$

Hierin (40) eingesetzt und geordnet ergibt

$$x_\tau \left[\frac{\exp(-(\rho+1)\tau) - \cos\omega\tau}{\sin\omega\tau} - \frac{\exp(-(\rho+1)(\tau+\Delta\tau)) - \cos\omega(\tau+\Delta\tau)}{\sin\omega(\tau+\Delta\tau)} \right] = x_\tau \left[\frac{1 - \exp(\tau)\cos\omega\tau}{\exp(\tau)\sin\omega\tau} - \frac{1 - \exp(\tau+\Delta\tau)\cos\omega(\tau+\Delta\tau)}{\exp(\tau+\Delta\tau)\sin\omega(\tau+\Delta\tau)} \right] \tag{48}$$

Diese Gleichung nach x_τ aufgelöst, liefert dies als Funktion von $\Delta\tau$.

$$x_\tau(\Delta\tau) = x_o \frac{Z_\tau(\Delta\tau)}{N_\tau(\Delta\tau)} \tag{49}$$

mit

$$\begin{aligned} Z_\tau(\Delta\tau) &= \left[1 - e^\tau \cos\omega\tau\right] e^{\tau+\Delta\tau} \cos\omega(\tau+\Delta\tau) \\ &\quad - \left[1 - e^{\tau+\Delta\tau}\cos\omega(\tau+\Delta\tau)\right] e^\tau \sin\omega\tau \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} N_\tau(\Delta\tau) &= \left[e^{-\rho\tau} - e^\tau \cos\omega\tau\right] e^{\tau+\Delta\tau} \sin\omega(\tau+\Delta\tau) \\ &\quad - \left[e^{-\rho(\tau+\Delta\tau)} - e^{\tau+\Delta\tau}\cos\omega(\tau+\Delta\tau)\right] e^\tau \sin\omega\tau \end{aligned} \tag{50}$$

Nun ist aber für alle τ

$$Z_\tau(0) = N_\tau(0) = 0 \quad . \tag{51}$$

Also ist der Grenzwert von x_τ für $\Delta\tau \to 0$ zunächst unbestimmt, da (47) zur Tautologie wird, wenn $\tau = \tau'$ ist. Dennoch ist es sinnvoll, den Grenzübergang durchzuführen. Da sowohl Z_τ als auch N_τ linear verschwinden, kann die Regel von l'Hospital angewandt werden.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{dZ}{d\Delta\tau} &= e^\tau(\sin\omega\tau + \omega(\cos\omega\tau - e^\tau)) \\ \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{dN}{d\Delta\tau} &= e^\tau(e^{-\rho\tau}((\rho+1)\sin\omega\tau + \omega\cos\omega\tau) - \omega e^\tau) \end{aligned} \tag{52}$$

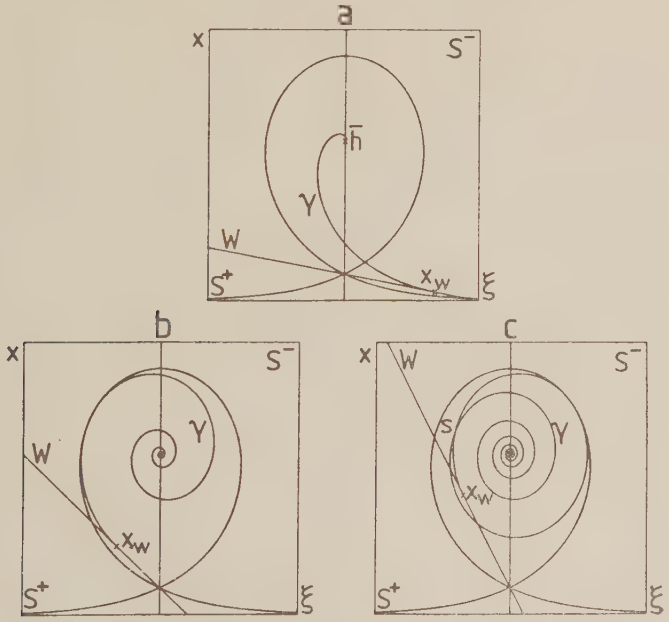


Abb. 9. Darstellung der drei Beispiele von kritischen Spiralen aus Abb. 6 in der S-Ebene.
Parameter wie in Abb. 6, Achsen wie Abb. 7.

Damit wird

$$x_\tau = x_\tau(0) = \lim_{\Delta\tau\to 0} x_\tau(\Delta\tau) = x_0 \frac{z(\tau)}{n(\tau)} \tag{53}$$

mit

und

$$z(\tau) = \sin\omega\tau + \omega(\cos\omega\tau - e^{\tau})$$
$$n(\tau) = e^{-\rho\tau}((\rho+1)\sin\omega\tau + \cos\omega\tau) - \omega e^{\tau} \tag{54}$$

Dies ist die zu (13) äquivalente Parameterdarstellung der kritischen Spirale in S!

Betrachten wir nun noch den interessanten Grenzfall $\tau \to 0$, nach (42) muß dieser Punkt der kritischen Spirale auf der Geraden W liegen. Der x_τ-Wert kann aber nicht unmittelbar durch Einsetzen in (53) erhalten werden, da $z(\phi)$ und $n(\phi)$ bei $\tau=0$ jeweils Nullstellen zweiter Ordnung besitzen, dashalb ist

$$\lim_{\tau\to 0} x_\tau = \frac{\lim\limits_{\tau\to 0} \frac{d^2}{d\tau^2} z(\tau)}{\lim\limits_{\tau\to 0} \frac{d^2}{d\tau^2} n(\tau)} \quad . \tag{55}$$

Dies liefert

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{d^2}{d\tau^2} z(\tau) = -\omega(\omega^2+1) \tag{56}$$

und

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{d^2}{d\tau^2} n(\tau) = \lim_{\tau\to 0} \frac{d}{d\tau} \left[-\rho e^{-\rho\tau}((\rho+1)\sin\omega\tau + \omega\cos\omega\tau) + e^{-\rho\tau}((\rho+1)\cos\omega\tau - \omega\sin\omega\tau) - \omega e^{\tau}\right]$$

$$= -\omega((\rho+1)^2 + \omega^2) \tag{57}$$

Also wird

$$\lim_{\tau \to \infty} x_\tau = x_0 \frac{\omega^2 + 1}{(\rho+1)^2 + \omega^2} = x_W \qquad (58)$$

Die kritische Spirale endet demnach gerade im Punkt x_W, der ja auch der Endpunkt ihres Definitionsbereichs ist (vergl. Abschnitt 5.2.3). Es ist dabei nicht verwunderlich, daß gerade der Grenzpunkt zwischen dem trennenden und nichttrennenden Bereich der Geraden W auch der Endpunkt von γ ist. Nur bei diesem Punkt besteht die Möglichkeit, in jeder offenen Umgebung eine "Abbildungsdauer 0" und eine Trennung benachbarter Trajektorien vorzufinden. Dieser Punkt ist somit ein Fixpunkt der Abbildung, die die kritische Spirale γ erzeugt.

5.3.2 Die Faltung der kritischen Spirale

Bei der Herleitung von (53) wurde die Bedingung (2.9b) nicht explizit berücksichtigt, d.h., grundsätzlich können auch Punkte, die diese Bedingung nicht erfüllen, auf γ liegen. Daß die kritische Spirale dennoch, wenn sie vollständig in S^- verläuft, tatsächlich (2.9b) erfüllt, sichert der folgende

Satz 1

Der Punkt x_τ liege auf der kritischen Spirale γ und ω^2 sei kleiner als $(\rho+1)$, dann existiert kein $\tau'<\tau$, für das eine Trajektorie, die in x_τ startet, die Sprungbedingung erfüllt.

Beweis

Da $\omega^2<\rho+1$ ist, ist der Radius der kritischen Spirale im x_0-Schnitt streng monoton, was bedeutet, daß diese jedes $\Gamma(r_0)$ in höchstens einem Punkt schneidet. Würde nun ein $\tau'<\tau$ existieren, für das die in x_τ startende Trajektorie die Sprungbedingung

ebenfalls erfüllt, so müßte auf dieser Trajektorie ein weiterer Eintrittspunkte x''_τ existieren, der auch einen Austrittspunkt x'_τ impliziert. Dabei wäre $x'_\tau \in S^+$ und $x''_\tau \in S^-$, letzterer Punkt würde demnach mit τ' auf W abgebildet. Da kein Dynamikwechsel berücksichtigt wird, müßten alle drei Punkte (x_τ, x'_τ und x''_τ) auf dem selben $\Gamma(r_o)$ liegen. Andererseits werden diese Punkte (direkt oder indirekt) auf W abgebildet, müssen also auch auf der kritischen Spirale liegen. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, da für $\omega^2<\rho+1$ keine Isola nach S^+ reichen darf! ***

Damit ist gezeigt, daß unter den Voraussetzungen des Satzes die kritische Spirale γ vollständig in S^- verläuft. Der entscheidende Punkt des Beweises lag in der Forderung, daß kein Austrittspunkt x'_τ auf der kritischen Spirale liegen darf; hierfür wurde die Bedingung $\omega^2<\rho+1$ gesetzt. Diese Bedingung ist allerdings unnötig scharf, da sie jede komplizierte Isola ausschließt. Das Auftreten komplizierter Isolae impliziert allerdings noch nicht, daß γ auch die Gerade W überschreitet, was für das Auftreten eines Zwischenpunktes (x'_τ) in S^+ notwendig ist.

5.3.2.1 Das Bild der kritischen Spirale

Betrachten wir die zu den Punkten der kritischen Spirale γ gehörigen Berührpunkte von Trajektorien auf der Geraden W (die Bilder von γ unter $\bar{P}$), so ist die x-Komponente dieser Punkte

$$x(\cdot) = x_\cdot \, e^{-\omega\tau}$$

$$= x_o \frac{z(\tau)}{n(\tau)} e^{-\omega\tau} = \frac{z(\tau)}{\bar{n}(\tau)} \qquad (59)$$

wobei $z(\tau)$ und $n(\tau)$ in (54) definiert wurden, $\bar{n}(\tau)$ ist einfach $n(\tau)e^{\rho\tau}$.

Aus den Eigenschaften der skalaren Funktion $x(\tau)$ soll nun versucht weden, Rückschlüsse auf das Verhalten von $\bar{P}$ zu ziehen. Dieses Vorgehen befremdet vielleicht auf den ersten Bilck, da die kritische Spirale γ ja als Urbild eines Abschnitts von W konstruiert wurde. Diese Abbildung erfolgte allerdings in einer Parameterdarstellung (mit der "Abbildungsdauer τ als unabhängiger Variable), und von daher ist es interessant und lehrreich, nun den Zusammenhang zwischen der x-Koordinate auf W und τ aufzuklären.

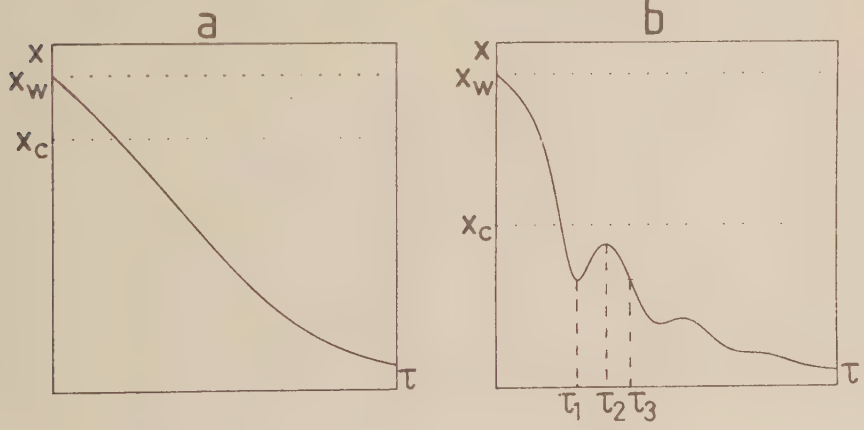


Abb. 10. Der Verlauf von $x(\tau)$.
In Teil (a) ist $\rho = 5$, $\omega = 2$, $\delta = 1$. Bei diesen Parametern verläuft die Funktion monoton.
In (b) ist $\rho = 1$, $= 9$, $\delta = 1$, hier besitzt $x(\ )$ Minima und Maxima, ist also nicht mehr global invertierbar.
Achsen: $\tau = 0 \,..\, 3$, $x = 0 \,..\, 1.1 \cdot x_w$.

Ist die Funktion $x(\tau)$ streng monoton fallend, so ist sie auch global invertierbar, d.h., jeder x-Wert aus dem Intervall

$(0,x_w)$ besitzt genau ein Urbild auf der kritischen Spirale, dies ist die im Satz 1 beschriebene Situation.

Besitzt $x(\tau)$ allerdings Minima und Maxima, so bedeutet dies, daß in bestimmten Bereichen mehrere Punkte der kritischen Spirale mit verschiedenen τ-Werten (unter der in $\bar{T}$ wirkenden Dynamik) auf den selben Punkt der Geraden W abgebildet werden. Nur einer dieser Punkte, der mit dem kleinsten τ, erfüllt die Bedingung (2.9b), alle anderen müssen für die Betrachtung von $\bar{P}$ verworfen werden. Dies bedeutet aber, daß für die Halbabbildung $\bar{P}$ ganze τ-Intervalle ausfallen.

Die Bedeutung dieser Tatsache für die Form der kritischen Spirale ist im folgenden Satz festgelegt.

Satz 2

An den Nullstellen der Ableitung von $x(\tau)$ verschwindet auch die w-Komponente der kritischen Spirale.

Beweis

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen. Für die Ableitung von $x(\tau)$ finden wir:

$$\frac{d}{d\tau}x(\tau) = \frac{x_0}{\bar{n}(\tau)^2}\left[\bar{n}(\tau)z'(\tau) - z(\tau)\bar{n}'(\tau)\right]$$

$$= \frac{x_0}{\bar{n}(\tau)^2}\left[\{(\rho+1)\sin\omega\tau+\omega(\cos\omega\tau-e^{-(\rho+1)\tau})\}\cdot\{\cos\omega\tau-\omega\sin\omega\tau-e^{\tau}\}\right.$$

$$\left. - \{\sin\omega\tau-\omega(e^{\tau}-\cos\omega\tau)\}\cdot\{(\rho+1)(\cos\omega\tau-e^{(\rho+1)\tau})-\omega\sin\omega\tau\}\right]$$

$$= \frac{x_0}{\bar{n}(\tau)^2}\left[-\rho\omega + e^{\tau}(\rho\omega\cos\omega\tau-(\omega^2+\rho+1)\sin\omega\tau) - \rho\omega e^{(\rho+2)\tau}\right.$$

$$\left. + e^{(\rho+1)\tau}(\rho\omega\cos\omega\tau+(\omega^2+\rho+1)\sin\omega\tau)\right] \qquad (60)$$

Die w-Komponente der kritischen Spirale ist:

$$
\begin{aligned}
w &= -\rho x_\tau + (\delta - x_\tau) - 2\omega\xi_\tau(x_\tau) \\
&= \frac{x_0}{n(\tau)\sin\omega\tau}\Big[-\{(\rho+1)\sin\omega\tau+\omega(e^{-(\rho+1)\tau}-\cos\omega\tau\}\{\sin\omega\tau-\omega(e^{-\tau}-\cos\omega\tau)\} \\
&\quad + \{\sin\omega\tau+\omega(e^{-\tau}-\cos\omega\tau)\}\{e^{-\rho\tau}((\rho+1)\sin\omega\tau+\cos\omega\tau)-\omega e^{-\tau}\}\Big] \\
&= \frac{x_0}{n(\tau)}\Big[\rho\omega e^{-(\rho+1)\tau}+e^{-\rho\tau}((\omega^2+\rho+1)\sin\omega\tau-\rho\omega\cos\omega\tau) \\
&\quad - (\omega^2+\rho+1)\sin\omega\tau-\rho\omega\cos\omega\tau+\rho\omega e^{-\tau}\Big]
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Die Ausdrücke in Blockklammern der Gleichungen (60) und (61) unterscheiden sich lediglich um einen Faktor $e^{-(\rho+1)\tau}$. Somit besitzen die w-Komponente der kritischen Spirale und die Ableitung ihres Bildes dieselben Nullstellen. ***

Dieser Beweis zeigt über die Aussage des Satzes hinaus, daß die kritische Spirale γ selbst einer ähnlichen Dynamik unterliegt wie die Trajektorien. Dabei ist die "Zeit", in der sich diese Dynamik entwickelt, die "Abbildungsdauer" τ der Halbabbildung $\overline{P}$.

5.3.2.2 Doppelt berührende Trajektorien

Ein nicht global invertierbares Bild der kritischen Spirale entsteht dadurch, daß Trajektorien die Trennebene **S** an zwei Stellen berühren können, was bei der verwendeten Konstruktion von γ zu Mehrdeutigkeiten führen kann. Der Schnittpunkt **b** (vergl. Abb. 11) der kritischen Spirale mit der Geraden **W** sowie der Schnittpunk der Spirale mit sich selbst (s), charakterisieren eine doppelt berührende Trajektorie. Diese startet in **s**, sie berührt **S** das erste Mal mit $\phi = \tau_1$ in **b** und für τ_3 in **c** (zur Bedeutung von τ_1 und τ_3 siehe Abb. 10). Damit muß **b**

sowohl auf der kritischen Spirale γ und der Geraden **W** liegen und **s** ist für τ_1 und τ_3 Startpunkt einer berührenden Trajektorie, was bedeutet, daß γ sich in diesem Punkt selbst schneidet. Dies impliziert eine Äquivalenz zwischen den Punkten **b** und **s**, die besonders im x_0-Schnitt deutlich wird, wo diese beiden Punkte zusammenfallen, da sie auf derselben Trajektorie liegen.

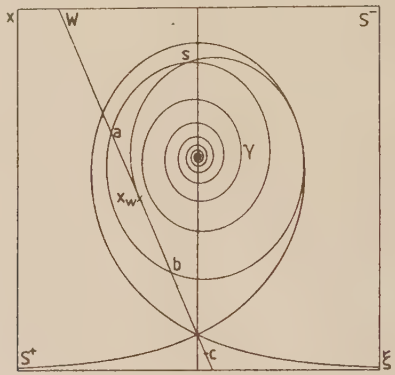


Abb. 11. Wenn das ω-ρ-Verhältnis genügend groß ist, kann die kritische Spirale die Gerade **W** überschreiten (vergl. Abb. 9). Dabei wird **s** auf **b** und dieser Punkt auf **c** abgebildet.
Parameter: $\rho = 5$, $\omega = 12$, $\delta = 1$.
Achsen: $\xi = -0.5 \,..\, 0.5$, $x = 0 \,..\, 1.7$.

Anhand des Verlaufs von $x(\tau)$ kann die Situation folgendermaßen interpretiert werden. Das Intervall $(\tau_1, \tau_3]$ liefert keinen Beitrag zu $\bar{P}$, da die Bildpunkte in diesem Intervall bereits durch kleinere τ-Werte realisiert werden. Das lokale Maximum von $x(\tau)$ liegt bei τ_2 (bei τ_1 liegt ein lokales Minimum), dann verläuft die kritische Spirale im Intervall (τ_1, τ_2) in S^+. Im Intervall $(\tau_2, \tau_3]$ verläuft sie zwar wieder in S^-, liefert aber keinen Beitrag zu $\bar{P}$, da auch die τ-Werte in diesem Intervall die Bedingung (2.9b) nicht erfüllen (die Punkte aus

diesem Abschnitt benötigen sogar zwei Zwischenpunkte, um auf W abgebildet zu werden).

Diejenigen Abschnitte der kritischen Spirale, die nicht zu $\bar{P}$ beitragen, werden durch "verbotene" Abbildungsschritte (vergl. Satz 1) zunächst auf reguläre Teile der Spirale gelegt (gefaltet), bevor sie auf W abgebildet werden. Die hier vorgestellte Entfaltung der äquivalenten Punkte s und b erlaubt es, einen weiteren Trennungsmechanismus (im τ-Raum) zu verstehen.

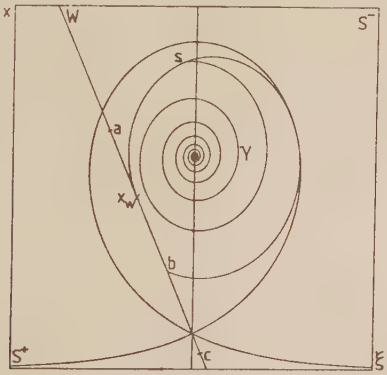


Abb. 12. Die kritische Spirale unter Berücksichtigung der Bedingung (2.9b). Nur die regulären Abschnitte werden gezeigt. Parameter und Achsen wie in Abb. 11.

Betrachten wir nur die Abschnitte der kritischen Spirale, die zu $\bar{P}$ beitragen, so fehlen die zum Intervall $(\tau_1, \tau_3]$ gehörigen Teile. In [Ue 1982] wurde die kritische Spirale bereits numerisch untersucht, und das Auftreten von Sprüngen im regulären Anteil (nur dieser wurde gefunden) als "Zerstückelung" der Spirale bezeichnet. Dieser Begriff soll hier allerdings nicht verwendet werden.

Der Vorgang des Schnitts von W durch die kritische Spirale kann sich wiederholen, für reguläre Bedingungen (h liegt im Innern von $\bar{S}$, $\rho>1$ und $\omega<\infty$) jedoch nur endlich oft, da jedes $r_o>\varepsilon>0$ für endliche τ-Werte unterschritten wird (vergl. Abschnitt 5.2.2) und somit immer unendlich viele innere Windungen von γ vollständig in S^- liegen.

Mit der Faltung der kritischen Spirale ist die komplizierteste Variante einer Halbabbildung dargestellt. Weitere Komplikationen verbietet der folgende

Satz 3

Keine Trajektorie kann S häufiger als zweimal berühren.

Beweis

Die Schnittlinie $\Gamma(r_o)$ einer dynamischen Mannigfaltigkeit mit S schneidet ihrerseits, nach Satz 4.1, die Gerade W in höchstens drei Punkten (vergl. Abschnitt 4.3), damit können maximal drei Berührpunkte existieren. Für alle Fälle in denen weniger als drei Schnittpunkte existieren, ist die Aussage somit bewiesen. Liegen aber genau drei Schnittpunkte vor, so hat, wiederum nach Satz 4.1, einer dieser Punkte einen x-Wert, der größer als x_o ist. Da für $\rho>0$ (!) immer $x_o>x_w$ ist, können höchstens zwei Schnittpunkte von $\Gamma(r_o)$ mit W auch Berührpunkte sein.

***

5.3.2.3 Bedingung für eine Faltung der kritischen Spirale

Der Grenzfall zwischen gefalteter und nicht gefalteter kritischer Spirale liegt (analog zu den Isolae) dann vor, wenn die Spirale die Gerade W berührt, ohne sie an einer anderen Stelle zu schneiden.

Satz 4

Berührt die kritische Spirale γ die Gerade W, so geschieht dies in x_W.

Beweis

Betrachten wir zunächst eine Spirale, die W schneidet, wobei die Nomenklatur von Abb.11 benutzt wird. Der erste Schnittpunkt b (der Austrittspunkt aus S^-), ist auch ein Berührungspunkt der zugehörigen Trajektorie, sein x-Wert liegt also im Intervall $(0,x_W)$. Die x-Komponente des zweiten Schnittpunkts a (des Wiedereintrittspunkts in S^-) kann nicht in diesem Intervall liegen, da sonst dreifach berührende Trajektorien möglich wären, also ist dessen x-Komponente $(a)_x \in (x_W,\infty)$. Da die kritische Spirale in der Formulierung von Gleichung (53) (ohne Berücksichtigung von (2.9b)) stetig differenzierbar ist, muß für die x-Komponente des Berührpunktes x_b gelten:

$$x_b \in \overline{(0,x_W)} \cap \overline{(x_W,\infty)} \tag{62}$$

Der Durchschnitt des Abschlusses der beiden Intervalle ist aber gerade x_W. ***

Wenn die beiden Schnittpunkte der kritischen Spirale mit der Geraden W zu einem Berührpunkt entarten, so bedeutet dies, daß in der Abbildung $x(\tau)$ zwei lokale Extrema zusammenfallen, und daraus eine waagerechte Wendetangente entsteht. Die Grenzbedingung für das Auftreten einer Faltung von γ lautet somit

$$\frac{d}{d\tau}\, x(\tau) = 0 \tag{63a}$$

und

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\, x(\tau) = 0 \tag{63b}$$

Dies sind zwei implizite Gleichungen in den drei Unbekannten ρ, und τ. Somit kann, falls die beiden Gleichungen nicht redundant sind, aus einer dieser Gleichungen das τ für den Wendepunkt als Funktion von ρ und ω bestimmt werden. Dies in die andere Gleichung eingesetzt, liefert dann die Grenzbedingung als Relation zwischen ρ und ω. Eine solche Relation kann in geschlossener Form leider nicht angegeben werden, die Gleichung (63) läßt sich jedoch noch weiter vereinfachen. Hierzu schreiben wir $x(\tau)$ wieder als Quotienten aus $z(\tau)$ und $\bar{n}(\tau)$

$$\frac{d}{d\tau}\, x(\tau) = \frac{x_0}{\bar{n}(\tau)^2}\left[z'(\tau)\bar{n}(\tau) - z(\tau)\bar{n}'(\tau)\right] = 0 \qquad (64)$$

Dies ist der in (60) untersuchte Ausdruck.

Für die zweite Ableitung erhalten wir dann

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\, x(\tau) = \frac{x_0}{\bar{n}(\tau)^4}\left[\bar{n}(\tau)^2\{z''(\tau)\bar{n}(\tau) - z(\tau)\bar{n}''(\tau)\}\right.$$
$$\left. - 2\bar{n}(\tau)\bar{n}'(\tau)\{z'(\tau)\bar{n}(\tau) - z(\tau)\bar{n}'(\tau)\}\right]$$
$$= \frac{x_0}{\bar{n}(\tau)^2}\left[z''(\tau)\bar{n}(\tau) - z(\tau)n''(\tau)\right] - \frac{2\bar{n}'(\tau)}{\bar{n}(\tau)}\,\frac{d}{d\tau}\, x(\tau) \qquad (65)$$

Damit kann (63a) zur Vereinfachung von (63b) genutzt werden und für die Grenzbedingung verbleibt:

und

$$\boxed{\begin{aligned} z(\tau)\bar{n}'(\tau) &= z'(\tau)\bar{n}(\tau) \\ z(\tau)\bar{n}''(\tau) &= z''(\tau)\bar{n}(\tau) \end{aligned}}\,. \qquad (66)$$

Ausgeschrieben ergibt diese Bedingung

$$0 = -\rho\omega + e^{\tau}(\rho\omega\cos\omega\tau - (\omega^2+\rho+1)\sin\omega\tau) + e^{-(\rho+1)\tau}(\rho\omega\cos\omega\tau + (\omega^2+\rho+1)\sin\omega\tau) - \rho\omega e^{(\rho+2)\tau}$$

und

$$0 = e^{\tau}(\omega^2+1)((\rho+1)\sin\omega\tau + \omega\cos\omega\tau) - e^{(\rho+1)\tau}(\omega^2+(\rho+1)^2)(\sin\omega\tau + \omega\cos\omega\tau) + e^{(\rho+2)\tau}\rho\omega(\rho+2) \qquad (67)$$

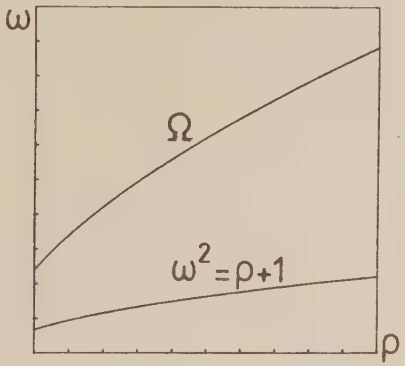


Abb. 13. Die Grenzkurve Ω zwischen einem einfachen und gefalteten Verlauf der kritischen Spirale im dafür entscheidenden Teilraum des kanonischen Parameterraums. Als Vergleich ist auch die $\omega^2 = \rho+1$ Kurve, die einfache von komplizierten Isolae trennt, nochmals gezeigt. Achsen: $\rho = 0 .. 10$, $\omega = 0 .. 15$.

Diese Gleichungen müssen, wie erwähnt, numerisch gelöst werden. Wie aus Abb. 13 deutlich wird, liegt die Grenze für gefaltete kritische Spiralen deutlich **über** der $\omega^2 = \rho+1$ Kurve, die die komplizierten von den einfachen Isolae trennt.

5.4 Die Bilder der Schnittlinien $\Gamma(r_0)$ unter $\bar{P}$

Nachdem bis zu dieser Stelle die Schnittlinien der Trennebene S mit den statischen und dynamischen Mannigfaltigkeiten sowie die Überstruktur der kritischen Spirale γ ausführlich diskutiert wurden, ist es nun an der Zeit, die Bedeutung dieser Strukturen für die Halbabbildung $\bar{P}$, d.h., die Bilder dieser Kurven unter $\bar{P}$, konkret zu fassen.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Abbildungstyp, jene $\Gamma(r_0)$, deren r_0 größer als das Maximum des Radius der kritischen Spirale im x_0-Schnitt ist (vergl. Abschnitt 5.2.3). Diese $\Gamma(r_0)$, die nur Ω-Kurven sein können, bleiben von γ unbeeinflußt.

Abb. 14. Eine Schnittkurve $\Gamma(r_0)$, die keine gemeinsamen Punkte mit der kritischen Spirale hat, wird an der Gerade W verzerrt "gespiegelt".
Parameter: $\sigma = 5$, $\mu = 1$, $\beta = 1$, $r_0 = 1.2 \cdot r_c$.
Achsen: $\xi = -0.5 \,..\, 0.5$, $\chi = 0 \,..\, 1.7$.

Da die in diesem Fall möglichen r_0 größer als r_w ist, besitzen diese Ω-Kurven lediglich einen Schnittpunkt mit der

Geraden W, dieser Schnittpunkt hat eine x-Komponente die größer als x_W ist und somit handelt es sich bei dieser Abbildung lediglich um eine verzerrte Spiegelung an der Geraden W.

Alle anderen Γ's haben mindestens einen Punkt, der auch auf der kritischen Spirale liegt, also Startpunkt einer berührenden Trajektorie ist. Hier wird der einfachste Abbildungstyp bei Ω-Kurven angetroffen, für die $r_C < r_0 < r_W$ ist. Diese Bedingung kann nur erfüllt werden, wenn $\omega^2 < \rho + 1$ ist, andernfalls ist $r_W < r_C$ und der Punkt x_W liegt auf dem cartesischen Blatt oder einer Isola.

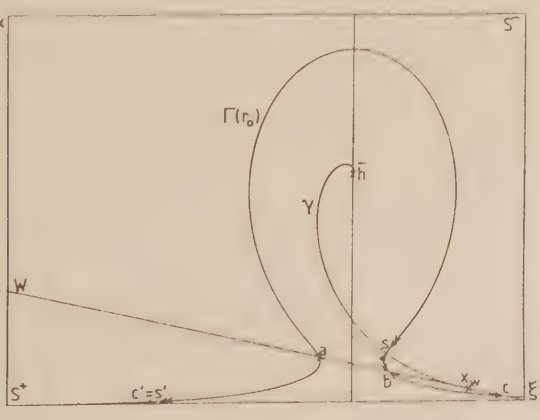


Abb. 15. Ω-Kurven, die die kritische Spirale schneiden, werden im Punkt s aufgetrennt und, wie angedeutet, in verschiedene Bereiche von S^+ abgebildet.
Parameter: ρ = 5, ω = 1, δ = 1, $r_0 = 1.025 \cdot r_C$.
Achsen: ξ = -0.5 .. 0.5, x = 0 .. 1.7.
In dieser und den folgenden Abbildungen sind die Bildpunkte in S^+, die mit einem "'" gekennzeichnet werden, nur schematisch dargestellt, da die wirklichen Bildpunkte weit jenseits der Plotgrenzen liegen.

Wie aus Abb. 15 ersichtlich, schneidet eine Ω-Kurve mit $r_0 < r_W$ die Gerade W in drei Punkten (a, b und c), nur c be-

sitzt einen x-Wert, der kleiner als x_W ist, somit können nur in diesem Punkt Trajektorien getrennt werden. **c** ist auch das Bild von **s**, dem Schnittpunkt der kritischen Spirale mit $\Gamma(r_0)$. Damit wird das Kurvenstück zwischen den Punkten **a** und **s** ($\widehat{as}$) (Kurvenstücke zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 sollen durch das Symbol $\widehat{P_1P_2}$ dargestellt werden, dabei gibt die Reihenfolge der Punkte die Orientierung an) auf $\widehat{ac'}$ abgebildet, dies ist der gleiche Mechanismus wie im ersten Fall. Das Kurvenstück $\widehat{bs}$ wird auf $\widehat{bc}$ "gespiegelt".

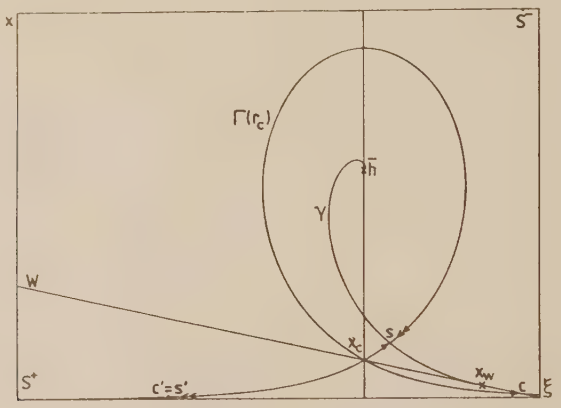


Abb. 16. Die Abbildung eines einfachen cartesischen Blatts verläuft analog zu Abb. 15.
Parameter: $\rho = 5$, $\omega = 1$, $\delta = 1$, $r_0 = r_c$.
Achsen: $\xi = -1 \,..\, 0.5$, $x = 0 \,..\, 1.7$.

An dieser Stelle wird deutlich, was die Trennung von benachbarten Trajektorien für die Halbabbildung $\bar{P}$ bedeutet. Betrachten wir in $\Gamma(r_0)$ eine offene Umgebung U des Punktes **s**, dann werden die Punkte aus $U \cap \widehat{as}$ in eine Umgebung von **c'** abgebildet, während das Bild von $U \cap \widehat{sb}$ in eine Umgebung von **c** zu finden ist. Der Punkt **s** (wie alle anderen Punkte der kritischen Spirale auch) ist demnach eine Unstetigkeitsstelle der

Abbildung $\bar{P}$.

Der bisher noch nicht diskutierte "Rest" von $\Gamma(r_o)$ in S^-, das Kurvenstück von c nach $(0,-\infty)^T$, wird wieder einfach nach $c(0,\infty)^T$ "gespiegelt". Dieser Abbildungstyp für große $|\xi|$ wird später noch wichtig, wenn die Frage nach der Existenz eines Attraktors der Gesamtabbildung P behandelt wird.

Das einfache cartesische Blatt ($\omega^2<\rho+1$) kann ebenso diskutiert werden, nur sind hier a und b durch den cartesischen Punkt x_c zu ersetzen.

Auch die einfachen Isolae werfen keine neuen Schwierigkeiten auf. Die Isola wird im Punkt s aufgeschnitten und als offenes Kurvenstück auf den Bereich $\widehat{cc'}$ der Basislinie abgebildet.

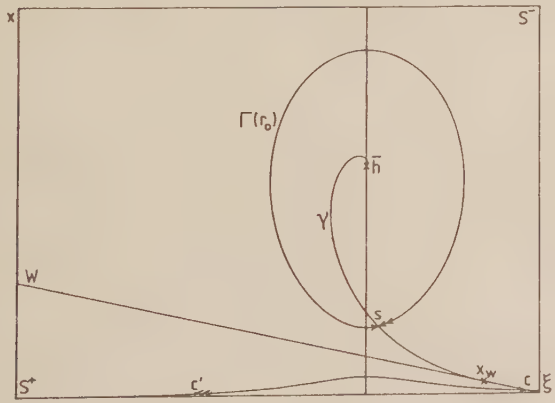


Abb. 17. Eine einfache Isola wird im Punkt s aufgeschnitten und offen auf die Basislinie gelegt.
Parameter: $\rho = 5$, $\omega = 1$, $\delta = 1$, $r_o = 0.95 \cdot r_c$.
Achsen: $\xi = -1 \,..\, 0.5$, $x = 0 \,..\, 1.7$.

Wesentlich komlexer wird die Situation, falls $\omega^2>\rho+1$ ist, da in diesem Fall das cartesische Blatt und eine Reihe von Isolae auch nach S^+ hinein reichen.

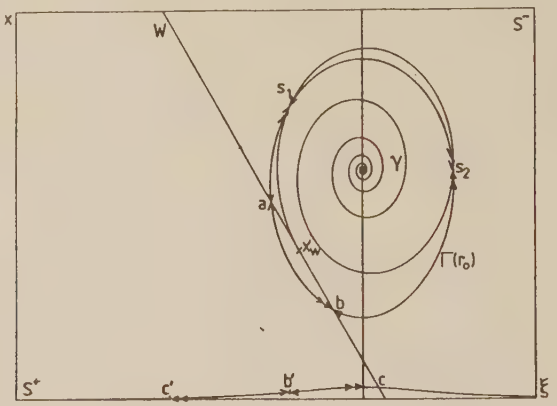


Abb. 18. Eine komplizierte Isola schneidet die kritische Spirale und die Gerade **W** je zweimal. Von den vier Abschnitten werden zwei aufeinander und zwei auf die Basislinie abgebildet.
Parameter: $\rho = 5$, $\omega = 8$, $\delta = 1$, $r_0 = 0.9\ r_c$.
Achsen: $\xi = -1 .. 0.5$, $x = 0 .. 1.7$.

Da für komplizierte Isolae $r_0>r_W$ ist, schneidet die kritische Spirale eine solche Isola in zwei Punkten s_1 und s_2 (vergl. Abschnitt 5.2.3), wobei s_1 auf **b** und s_2 auf **c** abgebildet werden. Die Isola wird also in diesem Fall an vier (!) Stellen aufgeschnitten. Da die x-Komponente von **a** größer als x_W ist, wird $\overset{\frown}{as}_1$ einfach auf $\overset{\frown}{ab}$ "gespiegelt". Der Rest der Isola ($\overset{\frown}{s_1 b}$) wird auf die Basislinie abgebildet, wobei dieses Kurvenstück im Punkt s_2 nochmals aufgeschnitten wird. Letztendlich ist $\overset{\frown}{b'c}$ das Bild von $\overset{\frown}{s_1 s_2}$ und $\overset{\frown}{s_2 b}$ wird auf $\overset{\frown}{cb}$ abgebildet. Die Orientierung des zweiten Bogens wird also nochmals umgekehrt. Die Zwischenpunkte **b'** zeigen dabei ein interessantes Verhalten, da ihre Ortskurve zwischen der Geraden **W** und deren

Bild unter $\bar{P}$ verläuft.

Für ein kompliziertes cartesisches Blatt ist die Situation ähnlich. Hier berührt die kritische Spirale die Schnittlinie $\Gamma(r_c)$ (vergl. Abschnitt 5.2.3), wodurch die Schnittpunkte s_1 und s_2 zu einem Berührpunkt s entarten. Das Kurvenstück $\overset{\frown}{as}$ wird dann auf $\overset{\frown}{ax}_c$ "gespiegelt", während $\overset{\frown}{sx}_c$ an einem Stück auf $\overset{\frown}{x'_c x}_c$ abgebildet wird.

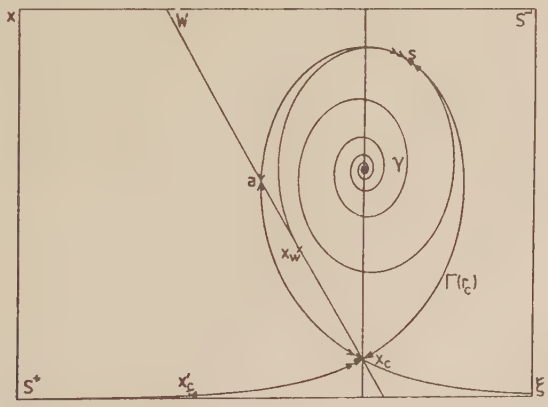


Abb. 19. Ein cartesisches Blatt verhält sich für $\omega^2 > \rho + 1$ ähnlich wie ein Isola, hier entarten allerdings die beiden Schnittpunkte mit der kritischen Spirale zu einem Berührpunkt s.
Parameter: $\rho = 5$, $\omega = 8$, $\delta = 1$, $r_0 = r_c$.
Achsen: $\xi = -1 \,..\, 0.5$, $x = 0 \,..\, 1.7$.

Zum Abschluß dieses Kapitels sei noch das Verhalten von $\bar{P}$ diskutiert, wenn die kritische Spirale γ die Gerade W überschreitet. In diesem Fall sind wir mit den in Abschnitt 5.3.2.1 diskutierten Schwierigkeiten konfrontiert, die dadurch entstehen, daß bestimmte Segmente von γ nicht direkt auf W abgebildet werden.

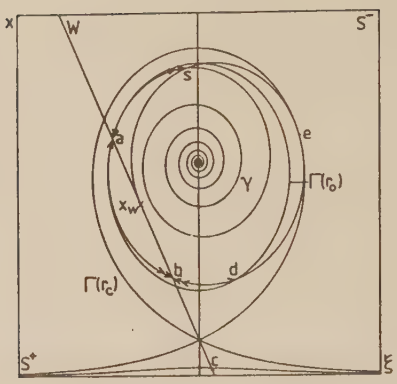


Abb. 20. Eine gefaltete kritische Spirale kann teilweise auf sich selbst abgebildet werden. Diese Entfaltung durch Berücksichtigung irregulärer Abbildungsschritte erklärt die auftretenden Lücken im τ-Raum.
Parameter: $\rho = 5$, $\omega = 12$, $\delta = 1$.
Achsen: $\xi = -0.5 \,..\, 0.5$, $x = 0 \,..\, 1.7$.

Die Situation in Abb. 20, wo die kritische Spirale eine Isola in vier (!) Punkten schneidet (wobei in diesem Beispiel zwei Schnittpunkte zu einem Berührpunkt entarten, weil der Punkt **a** nach Konstruktion auf dieser Isola liegt), scheint auf den ersten Blick der Aussage von Abschnitt 5.2.3 zu widersprechen, die im x_0-Schnitt höchstens zwei Schnittpunkte einer Isola mit γ zuläßt. Dieser Widerspruch löst sich jedoch auf, wenn man bedenkt, daß im x_0-Schnitt jede Trajektorie durch einen einzigen Punkt repräsentiert wird, in **S** können dies jedoch mehrere Punkte sein, wenn die Bedingung (2.9b) unberücksichtigt bleibt.

Konkret heißt das, die Darstellungen der kritischen Spirale in **S** wird nicht eins-zu-eins auf die Darstellung im x_0-Schnitt abgebildet, sondern wird (ähnlich wie die x-Komponente des Bildes der Spirale, die in Abb. 10b gezeigt ist) in "Falten" darüber gelegt.

Damit kann nun auch der Äquivalenzbegriff zwischen dem x_o- und dem S-Schnitt schärfer gefaßt werden. Die beiden Darstellungen sind so lange äquivalent (die Transformation zwischen ihnen ist bijektiv), wie die Bedingung (2.9b) erfüllt ist. Diese Aussage müßte dynamisch für jede Abbildung eines Punktes überprüft werden und ist von daher wenig hilfreich. Bei den vorgeschlagenen Darstellungen der kritischen Spirale ist für ein betrachtetes System die Bedingung (2.9b) allerdings immer erfüllt, wenn das ω dieses Systems unterhalb der durch Gleichung (67) definierten Kurve liegt (vergl. Abb. 13).

Nach diesem Exkurs soll nun noch Abb. 20 kurz diskutiert werden. Das Spiralelement $\overset{\frown}{x_W s}$ wird regulär auf $\overset{\frown}{x_W b}$ (auf W) abgebildet. Auch $\overset{\frown}{sb}$ ist ein regulärer Abschnitt der kritischen Spirale und wird damit direkt auf $\overset{\frown}{bc}$ abgebildet (s ist der Startpunkt einer doppelt berührenden Trajektorie und b ist der erste Berührpunkt), wobei der Berührpunkt e mit dem cartesischen Blatt auf den cartesischen Punkt x_c fällt.

Der Bogen $\overset{\frown}{ba}$ liegt in S^+ und kann von daher nicht regulär abgebildet werden, da die abbildenden Trajektorien unter der Dynamik von $\bar{T}$ durch $\tilde{T}$ laufen. Dieser Bogen wird also irregulär auf $\overset{\frown}{bd}$ abgebildet, wobei der Endpunkt d ein Schnitt der kritischen Spirale mit der Isola ist, auf der auch a liegt.

Auch das Spiralelement $\overset{\frown}{as}$, obgleich es in S^- liegt, kann nicht regulär auf W abgebildet werden, es wird zunächst auf $\overset{\frown}{ab}$ und in einem weiteren Schritt auf $\overset{\frown}{bd}$ abgebildet (jeder Punkt auf $\overset{\frown}{as}$ besitzt damit sogar zwei Zwischenpunkte).

Der Rest der kritischen Spirale, die im vorgestellten Beispiel (Abb. 20) die Gerade W nur einmal schneidet, wird nun vollkommen regulär (in einem Schritt) auf W abgebildet. Dabei werden die in Abb. 17 und Abb. 18 vorgestellten Abbildungstypen benutzt.

Schneidet γ die Gerade **W** mehrmals (vergl. Abb. 21), so verhält sich jede der endlich vielen schneidenden Windungen ebenso wie die oben beschriebene äußerste schneidende Spiralwindung.

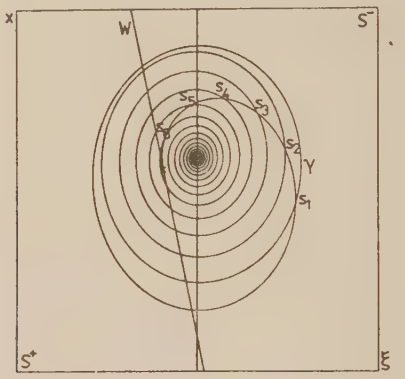


Abb. 21. Bei einem genügend großen ω-ρ-Verhältnis kann die kritische Spirale γ die Gerade **W** auch mehrmals (hier sechsmal) schneiden.
Parameter: $\rho = 5$, $\omega = 25$, $\delta = 1$.
Achsen: $\xi = -0.5 \,..\, 0.5$, $x = 0 \,..\, 1.7$.

Damit sind nun alle in $\bar{\mathbf{P}}$ vorkommenden Abbildungsmechanismen beschrieben. Für die Erzeugung chaotischer Lösungen würde der in Abb. 17 vorgestellte Trennungsmechanismus ausreichen. Dieser tritt in reiner Form auch immer in der Umgebung des homoklinoiden Punktes **h** auf und erzeugt für jede Windung der kritischen Spirale einen Smale Horseshoe [Sm 1967; Shil 1965,1970]. Darüber hinaus wurden weitere Komplikationen gefunden, die nur auftreten, wenn ω^2 größer als $(\rho+1)$ bzw. größer als $\Omega(\varepsilon)$ (vergl. Abb. 13) ist.

(1) Ein Teil einer komplizierten Isola kann, unverbunden mit der Basislinie, auf einen anderen Abschnitt dieser Isola abgebildet werden (vergl. Abb. 18).

(2) Das Bild einer komplizierten Isola auf der dazugehörigen Basislinie wird nochmals aufgeschnitten und mit anderer Orientierung wieder zusammengesetzt.
(3) Die Dynamik der Zwischenpunkte **b** auf der Basislinie wird unstetig, wenn eine Faltung der kritischen Spirale auftritt.

Dieses Verhalten wird nur für höchstens endlich viele äußere Windungen der kritischen Spirale angetroffen und bildet die Grundlage für chaotische Lösungen, die unabhängig von der Existenz einer homoklinen Trajektorie sind.

6 Die Abbildung $\tilde{P}$

Nachdem in den letzten Kapiteln ausführlich die Halbabbildung $\bar{P}$ behandelt wurde, soll nun noch kurz ihr Gegenstück $\tilde{P}$ behandelt werden. Die Kürze der Darstellung erklärt sich aus der Tatsache, daß die Dynamik in $\tilde{T}$ lediglich einen virtuellen Steady State besitzt und damit (wie beschrieben) nur Ω-Kurven zu $\tilde{P}$ beitragen können. Dies bedeutet aber, daß diese Halbabbildung keine der potentiell chaoserzeugenden Strukturen aufweist, wie sie in $\bar{P}$ auftreten.

Diese Aussage wird durch den folgenden Punkt noch schärfer gefaßt.

Satz 1

Eine Trajektorie, die in S^o in $\tilde{T}$ eintritt, verläßt dieses Gebiet wieder bei einem ϕ-Wert, der kleiner als π/ω ist.

Beweis

Wir betrachten die Phasendifferenz zwischen Eintritt und Austritt aus $\tilde{T}$. Sei r_{in} der Eintrittsradius ($|y_{in}|$) und $\eta_{in}=(\delta - x_{in})/2=\mathrm{Re}\, y_{in}$ der Realteil der komplexen Eintrittsamplitude, so ist für die Eintrittsphase ψ_{in}

$$\cos\psi_{in} = \frac{\eta_{in}}{r_{in}} \qquad (1)$$

Da im Streifen S^o die möglichen x-Werte in $[-\tilde{X},0]$ liegen, gilt

$$\psi_{in} > \arccos\frac{\tilde{\eta}_\infty}{r_{in}} \qquad (2)$$

somit ist für jedes endliche r_{in}:

$$\psi_{in} > -\frac{\pi}{2} \tag{3}$$

In gleicher Weise kann auch die Austrittsphase ψ_{out} abgeschätzt werden

$$\psi_{out} < \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

somit ist

$$\tau = \frac{1}{\omega}(\psi_{out} - \psi_{in}) < \frac{\pi}{\omega} \tag{5}$$

***

Da alle Punkte in S^+, dem Definitionsbereich von $\tilde{P}$, auf Ω-Kurven liegen, werden diese auch ähnlich abgebildet wie die Ω-Kurven unter $\bar{P}$, d.h., die Schnittlinie Γ wird an der Geraden W verzerrt gespiegelt. Die einfachste mögliche Realisation der Halbabbildung $\tilde{P}$ wäre in der Tat eine einfache Spiegelung, an W.

Die hier beschriebene Größe π/ω ist für große Eintrittsradien auch eine gute Näherung für die "Abbildungsdauer" von $\bar{P}$. Darüber hinaus spielt sie eine wichtige Rolle in der Theorie endlicher Wellenüge. Hier ist für $\tau \to \infty$ die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden τ's, die homokline Trajektorien beschreiben, gerade π/ω (vergl. [Fe 1982; Ka, Rö 1983; Kar, Ka 1977]).

6.1 Das Urbild des homoklinoiden Punktes

Nach dem bisher Gesagten besteht die Aufgabe von $\tilde{P}$ in erster Linie darin, den Bildbereich von $\bar{P}$ derart zurück abzubilden, daß im nächsten Schritt die in $\bar{P}$ enthaltenen Trennungsmechanismen wieder wirksam werden können. Nur so können chaotische Lösungen entstehen. Da bisher kein allgemeines Kriterium für das Auftreten chaotischer Lösungen gefunden wurde, soll hier zumindest eine Voraussetzung für Shil'nikov Chaos herausgearbeitet werden.

Wie bereits im 4. Kapitel diskutiert wurde, spielen homokline Trajektorien eine wichtige Rolle bei der Entstehung des Chaos. Es ist deshalb von großem Interesse, eine Bedingung für die Existenz solcher Trajektorien zu finden. Eine homokline Trajektorie spiralisiert - wie oben beschrieben - in der stabilen Mannigfaltigkeit aus dem realen Steady State und endet wieder in diesem, nachdem sie N-mal durch $\tilde{T}$ gelaufen ist (vergl. Abschnitt 4.1). Alle Durchtrittspunkte dieser Trajektorie durch S liegen demnach im Streifen S^0.

Eine notwendige Voraussetzung für das Auftreten homokliner Trajektorien ist damit, daß speziell der letzte Eintrittspunkt in $\tilde{T}$, also das Urbild des homoklinoiden Punktes $\bar{h}$ unter $\tilde{P}$ in diesem Streifen liegt. Da die Begrenzungslinien $\bar{\Sigma}$ und $\tilde{\Sigma}$ von S^0 parllel zur ξ-Achse verlaufen, reicht es aus, die x-Komponente des Urbilds von $\bar{h}$ zu bestimmen. Diese muß (in homogenen Koordinaten) aus $[-\tilde{X},0]$ sein.

$$0 > (\tilde{P}^{-1}(\bar{h}))_x > -\tilde{X} \qquad (6)$$

Die Koordinaten des homoklinoiden Punkts in der "$\tilde{}$"-Basis lauten

$$(\bar{h})_x = x_o - \tilde{X}$$
$$(\bar{h})_y = -\tilde{Y} \qquad (7)$$

Damit erhalten wir für einen Eintrittspunkt $(x_p, y_p)^T$ in $\tilde{T}$ bei einer "Verweildauer" τ_p :

$$x_p + 2\mathrm{Re}\, y_p = \tilde{\delta} \qquad (8a)$$
$$x_p \cdot \exp(-\rho\tau_p) = \bar{x}_o - \tilde{X} \qquad (8b)$$
$$y_p \cdot \exp((1+i\omega)\tau_p) = -\tilde{Y} \qquad (8c)$$

Diese Gleichung kann ebenso wie (2.9) nicht geschlossen gelöst werden, läßt sich aber auf eine einzige reelle Gleichung reduzieren. Die Koordinaten des Urbildpunktes sind:

$$x_p = (\bar{x}_o - \tilde{X}) \cdot \exp(\rho\tau_p) \qquad (9a)$$

$$\eta_p = \frac{1}{2}\left[\tilde{\delta} - (\bar{x}_o - \tilde{X})\exp(\rho\tau_p)\right] \qquad (9b)$$

$$\xi_p = -\frac{\mathrm{Im}\tilde{Y} \cdot \exp(-\tau_p) + \eta_p \sin\omega\tau_p}{\cos\omega\tau_p} \qquad (9c)$$

Demnach verbleibt noch eine Gleichung in τ_p :

$$(\bar{x}_o - \tilde{X})\exp(\rho\tau_p) + 2\mathrm{Re}\left[-\tilde{Y} \cdot \exp(-(1+i\omega)\tau_p)\right] = \tilde{\delta} \quad , \qquad (10)$$

die allerdings numerisch gelöst werden muß.

Abbildung 1 zeigt eine für die Praxis wichtige Anwendung. Hier sind für das Modellsystem x_p, $\bar{x}_o$, und $\tilde{X}$ (in auf $\bar{K}$ bezogenen Koordinaten) gegen die Wellengeschwindigkeit c aufgetragen. Für $\bar{x}_o > \tilde{X}$ existieren keine homoklinen Trajektorien, da $\bar{h}$ selbst nicht in S^o liegt (der Fall $\bar{x}_o < 0$ wird durch SY3 ausgeschlossen). Ist $\bar{x}_o = \tilde{X}$ (an den Stellen c_1 und c_4), so folgt aus der fehlenden Dynamik in x-Richtung auch $\bar{x}_p = \tilde{X}$. (Die-

ser Fall ist als analytischer Grenzfall von Interesse, kann aber durch die Dynamik nicht realisiert werden.) Lediglich in zwei c-Intervallen (c_1,c_2) und (c_3,c_4) ist die Bedingung $0<x_p<\bar{x}_0<\tilde{x}$ erfüllt. Diese beiden Intervalle entsprechen den beiden Ästen der Dispersionsrelationen endlicher Wellenzüge, wobei die Stellen c_2 und c_3, wo $x_p=0$ ist, den instabilen bzw. stabilen Einzelimpuls darstellen. Ist $x_0>x_p>0$, so handelt es sich um längere Wellenzüge (s.o.).

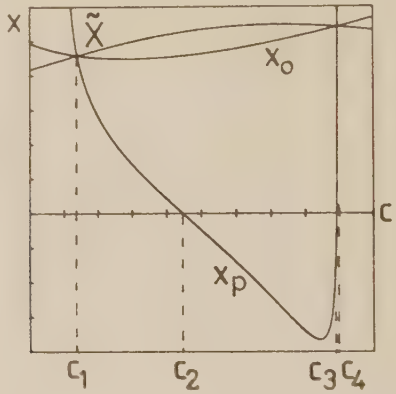


Abb. 1. Für das Modellsystem sind die x-Komponenten des homoklinoiden Punktes $(\bar{x}_0)$, dessen Urbilds (x_p) sowie die des virtuellen Steady State $(\tilde{X})$ als Funktionen der Wellengeschwindigkeit c dargestellt. Nur wenn $\bar{x}_0$ kleiner als $\tilde{X}$ und $\bar{x}_0>x_p>0$ ist, können homokline Trajektorien auftreten.
Systemparameter: b = 1, d = 0.0625, e = 150, μ = 10.
Achsen: c = 3 .. 11, x = -0.5 .. 0.75.

Die c-Intervalle mit homoklinen Lösungen werden durch einen Bereich (c_2,c_3) getrennt, in dem $x_p<0$ ist, sodaß nach Voraussetzung keine homoklinen Trajektorien existieren können. Wenn durch Variation der Systemparameter (speziell d) das Minimum der x_p-Kurve gerade den Wert 0 annimmt, so ist dort (im Parameterraum) das Knie der Dispersionsrelation erreicht, an dem sich der

stabile und instabile Ast treffen (vergl. [Ka,Rö 1983]). Jenseits davon, wenn das x_p-Minimum einen Wert größer als 0 hat, existiert für keine Ausbreitungsgeschwindigkeit c eine Einzelimpulslösung (wohl aber Wellenzüge mit mehreren Impulsen).

Die numerische Lösung von (10) und die daraus folgende Auswertung der Gleichung (9) liefert, wie gesehen, weit mehr Informationen, als zur Klärung der ursprünglichen Fragestellung (der Suche nach Bedingungen für homokline Lösungen) benötigt werden. Deshalb sei diese Frage hier nochmals aufgeworfen.

Hierzu betrachten wir nicht die Umkehrung der Abbildung $\tilde{P}$, sondern die Inversion der Dynamik in $\tilde{T}$. Die beiden Betrachtungsweisen sind äquivalent, solange simultan zur Dynamik die Bedingung (2.9b) beachtet wird; in den letzten Kapiteln erwies es sich jedoch oft als vorteilhaft, diese Bedingung teilweise zu ignorieren und erst später einzuführen. Hier soll (2.9b) zunächst vollständig außer acht gelassen werden. Anstatt die Dynamik, also (10) zu lösen, soll τ_p abgeschätzt werden. Dabei nehmen wir an, daß $\tilde{X}>\bar{x}_o$ ist. Dann kann für die x-Komponente folgende Bedingung formuliert werden:

$$(\bar{x}_o-\tilde{X})\exp(\rho\tau_1') = -\tilde{X}$$

$$\tau_1' = -\frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{\tilde{X}-\bar{x}_o}{\tilde{X}}\right) \qquad (11)$$

τ_1' ist also die "Zeit", die die Trajektorie unter der inversen Dynamik benötigt, um den Grenzwert $x=-\tilde{X}$ zu erreichen. Dies ist die Abschätzung für τ_p, falls τ_1' auch kleiner als π/ω ist, wie es in Satz 1 gefordert wird.

Damit kann ein

$$\tau_1 := \min\left[\tau_1', \frac{\pi}{\omega}\right] \tag{12}$$

definiert werden. Wird dieses τ_1 in die Dynamik eingesetzt und die u-Komponente berechnet, so folgt

$$u(\tau_1) = (\bar{x}_o - \tilde{X})\exp(\rho\tau_1) - 2\exp(-\tau_1)\mathrm{Re}\left[\tilde{Y}\cdot\exp(-i\omega\tau_1)\right] \tag{13}$$

Falls $u(\tau_1) > \tilde{\delta}$ ist, so ist auch $\tau_p > \tau_1$, und es existieren keine homoklinen Trajektorien; im anderen Fall ist $\tau_p < \tau_1$, was das Auftreten solcher Lösungen erlaubt.

Eine einfache Abschätzung der "Abbildungszeit" erlaubt es also, die numerische Lösung von (10) zu umgehen und via (13) eine Existenzbedingung für homokline Trajektorien geschlossen anzugeben.

7 Die Komposition der Halbabbildungen

Die Poincarē Abbildung P zeigt als Komposition der beiden Halbabbildungen $\bar{P}$ und $\tilde{P}$ sowohl Eigenschaften ihrer beiden Konstituenten als auch solche Eigenschaften, die erst aus dem spezifischen Zusammenwirken von $\bar{P}$ und $\tilde{P}$ resultieren. Nachdem bisher die beiden Halbabbildungen für sich genommen Gegenstand der Untersuchung waren, soll nun noch ihre Interaktion betrachtet werden.

Am konkreten Beispiel ist zunächst einmal zu untersuchen, ob nicht die zweite Halbabbildung alle Trennungseigenschaften der ersten wieder aufhebt und damit P zur Identität wird. Diese Möglichkeit ist beim untersuchten Modellsystem nicht gegeben, da sich die beiden Teildynamiken lediglich durch ihre Inhomogenität unterscheiden.

7.1 Der Attraktor

Eine weitere wichtige Frage ist die nach attrahierenden bzw. repellierenden Strukturen ohne Sattelcharakter. Da sich Attraktoren und Repelloren lediglich durch eine Spiegelung in ϕ unterscheiden, seien hier die Attraktoren diskutiert.

Ein Testvolumen V verhält sich unter der Systemdynamik gemäß der Differentialgleichung

$$\frac{dV}{d\phi} = \int_V \mathrm{tr}\mathbf{B}\, dx d\eta d\xi \qquad (1)$$

Da die dynamische Matrix $\mathbf{B}$ von der Phasenraumlage unabhängig ist, kann die Integration unmittelbar ausgeführt werden. Damit

ergibt sich die Volumenwachstumskonstante ν zu

$$\nu := \frac{1}{V}\frac{dV}{d\phi} = \mathrm{tr}\mathbf{B} = 2 - \rho \tag{2}$$

Hieraus folgt, daß nur für

$$\rho > 2 \tag{3}$$

überhaupt ein Attraktor existieren kann. Dies ist eine notwendige, jedoch keine hinreichende Bedingung, da sie einen Sattelcharakter nicht ausschließt. Betrachten wir z.B. ein rein lineares System mit der Dynamik $\mathbf{B}$, so tritt für $\rho > 2$ zwar eine Volumenkontraktion auf, dennoch besitzt das System nur unbeschränkte Lösungen.

Die Schwierigkeit, einen konkreten Attraktor aufzufinden, liegt darin, daß in der behandelten Systemklasse grundsätzlich keine globalen Attraktoren existieren können, jeder Attraktor hat somit lediglich ein endliches Bassin. Den Grund hierfür liefert der folgende Divergenzsatz.

Satz 1

Für jedes System der behandelten Klasse existiert ein R so, daß alle Trajektorien, deren Anfangsbedingungen $(x(0),y(0))$ zwischen den beiden stabilen Mannigfaltigkeiten liegen, für $\phi \to \infty$ divergieren, falls $|y(0)| > R$ ist.

Beweis

Zum Beweis soll ein $\bar{R}$ konstruiert werden, das eine obere Schranke für R ist, also die beschriebene Eigenschaft besitzt, ohne auch das kleinste mögliche $\bar{R}$ zu sein.

Im Beweis von Satz 6.1 wurde gezeigt, daß für $|y(0)| \to \infty$ die "Verweildauer" in $\bar{T}$ und $\tilde{T}$ jeweils gegen π/ω strebt, hier soll zunächst ein R_1 konstruiert werden, das, als Eintrittsradius für die beiden Teilbereiche, jeweils eine "Verweildauer" τ_s von mindestens $\pi/2\omega$ garantiert. τ_s wird dann am kleinsten sein, wenn der Austrittsradius gleich dem Eintrittsradius ist, und wenn der Realteil von y beim Eintritt und Austritt möglichst groß ist. In $\bar{T}$ kann auf diese Weise eine Trajektorie durch einen Kreis abgeschätzt werden, dessen Mittelpunkt einen Abstand $(\tilde{X}-\bar{\delta})/2$ von S hat. In $\tilde{T}$ kann der Abstand $(\tilde{X}+\tilde{\delta})/2$ betragen; da der zweite Abstand größer ist, soll er zur Abschätzung herangezogen werden. Damit folgt die Forderung

$$R_1 \geq \sqrt{2}\,(\tilde{X}+\tilde{\delta}) \qquad (4)$$

Beim Wechsel zwischen den Dynamiken wird zur y-Komponente $\tilde{Y}$ addiert oder subtrahiert. Bei einem Austrittsradius R_{out} aus $\bar{T}$ bzw. $\tilde{T}$ kann damit der Eintrittsradius R_{in} in den jeweils anderen Halbraum nach der Dreiecksungleichung folgendermaßen abgeschätzt werden

$$R_{in} > |R_{out} - |\tilde{Y}|| \qquad (5)$$

Damit soll nun ein R_2 abgeschätzt werden, für das jeweils in $\bar{T}$ und $\tilde{T}$ der Zuwachs des Radius durch die Dynamik größer als die in (5) beschriebene Abnahme ist. Also muß

$$R_2 e^{\pi/2\omega} - |\tilde{Y}| > R_2$$

sein. Wird R_2 genügend groß gewählt, so können die Betragsstriche auf der linken Seite entfallen und es folgt

$$R_2 > \frac{|\tilde{Y}|}{\exp(\pi/2\omega)-1} \tag{6}$$

Da R_2 auch die Eigenschaften von R_1 benutzt, muß es auch (4) erfüllen. Damit ist ein $\bar{R}$ gefunden, für das

$$|P(x(0),y(0))_y| > |y(0)| \tag{7}$$

gilt. Dieses berechnet sich zu

$$\bar{R} = \max\left(\sqrt{2}(\tilde{X}+\delta), \frac{|\tilde{Y}|}{\exp(\pi/2\omega)-1}\right) \tag{8}$$

und garantiert, daß für alle Anfangsbedingungen mit $|y(0)|>R$ bei jedem Abbildungsschritt $|(\hat{P}(x,y))_y|>|y|$ ist und somit die Lösungen für $\phi\to\infty$ divergieren. ***

Die Frage, wann überhaupt ein Attraktor existiert, konnte bisher nicht allgemein geklärt werden. Einige konkrete Beispiele sollen jedoch kurz vorgestellt werden.

7.2 Die Abstimmung der Definitions- und Wertebereiche

Die beiden Halbabbildungen $\bar{P}$ und $\tilde{P}$ sind zwar jeweils auf dem Schnitt von S^0 mit S^+ bzw. S^- definiert, bilden aber ihren Definitionsbereich lediglich auf eine Teilmenge des anderen Halbstreifens ab. Die Untersuchung dieser Teilmengen ist von entscheidender Bedeutung für den Charakter der Lösungen. Wenn beispielsweise die trennenden Strukturen von $\bar{P}$ nicht in der Grenzmenge der Gesamtabbildung liegen, können auch keine chaotischen Lösungen erwartet werden. Die Bestimmung der Grenzmenge von P

$$G_p := P^{\infty}(S^- \cap S^0) \tag{9}$$

ist äquivalent zur Ermittlung eines Attraktors bzw. Repellors. Von daher ist dieses Problem ebensowenig abschließend gelöst wie die Existenzfrage von Attraktoren. Doch ebenso wie im letzten Abschnitt können auch hier notwendige Bedingungen für bestimmte Eigenschaften von G_p angegeben werden.

Bereits im letzten Kapitel wurde untersucht, unter welchen Bedingungen der homoklinoide Punkt $\bar{h}$ im Wertebereich von $\tilde{P}$ liegt. Hier soll nun versucht werden, die Bilder der Grenzen der Definitionsbereiche von $\bar{P}$ und $\tilde{P}$ zu bestimmen.

Am einfachsten ist die Situation bei der Abbildung von $\bar{\Sigma} \cap S^-$ und $\tilde{\Sigma} \cap S^+$. In diesen Fällen ist jeweils $x=0$, d.h., auch das Bild dieser Strahlen liegt wieder in $\bar{\Sigma}$ bzw. $\tilde{\Sigma}$. Während $\tilde{\Sigma}$ dabei lediglich am Schnittpunkt der Geraden $\tilde{\Sigma}$ und W (dieser Punkt ist ein Fixpunkt) "gespiegelt" wird, ist der Abbildungsmechanismus für $\bar{\Sigma}$ etwas komplizierter. Der Schnitt von $\bar{\Sigma}$ mit W ist ein Berührpunkt und wird auf den in Abschnitt 4.4 diskutierten Punkt $a_b' = \bar{P}(a_b)$ abgebildet. Der Bereich zwischen diesen beiden Punkten ist das "Bild" des homoklinoiden Punktes $\bar{h}$ (mit

unendlicher "Abbildungsdauer"), für alle anderen Punkte a auf $\bar{\Sigma} \cap S^-$ gilt die auch auch für $\tilde{\Sigma} \cap S^+$ gültige Beziehung:

$$(a_1)_\xi > (a_2)_\xi \Rightarrow (P(a_1))_\xi < (P(a_2))_\xi \qquad (10)$$

Dies ist die "Spiegelungseigenschaft", die im Abschnitt 5.4 diskutiert wurde.

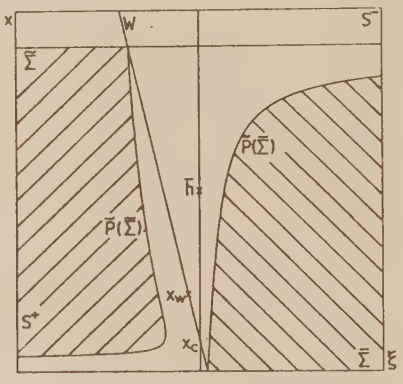


Abb. 1. Die Bilder von $\bar{\Sigma}$ und $\tilde{\Sigma}$ unter $\bar{P}$ bzw. $\tilde{P}$.
Achsen: ξ = -2.5 .. 2.5, x = 0 .. 2.
Parameter: ρ = 5, ω = 5, $\bar{\delta}$ = 1, $\tilde{\delta}$ = 1, $\tilde{X}$ = 1.8.

Das Bild der Geraden W, soweit diese im Streifen S° verläuft, ist ebenfalls relativ einfach qualitativ zu finden. Für $\tilde{P}$ besteht die ganze Strecke aus Fixpunkten, wird also auf sich selbst abgebildet; für $\bar{P}$ sind die Punkte mit x-Werten aus dem Intervall $(x_W, \tilde{X}]$ ebenfalls Fixpunkte. Die Punkte mit x-Werten aus $(0, x_W)$ sind Berührpunkte, deren Bilder im Innern von $S^\circ \cap S^+$ liegen.

Zum Abschluß dieses Abschnitts soll noch das Bild von $\tilde{\Sigma} \cap S^-$ unter $\bar{P}$ bzw. $\bar{\Sigma} \cap S^+$ unter $\tilde{P}$ untersucht werden. Betrachten wir zunächst den erstgenannten Fall. Der Schnittpunkt von $\tilde{\Sigma}$

mit der Geraden W ist entweder ein Fixpunkt von $\bar{P}$ $(x>x_W)$ oder aber ein Berührpunkt $(x<x_W)$, beide Fälle wurden bereits diskutiert. Die übrigen Punkte von $\tilde{\Sigma}$ sind im allgemeinen keine ausgezeichneten Punkte und können auch nicht explizit angegeben werden. Der Grenzwert der "Abbildungszeit" für große Werte von $|\xi|$ ist nach Satz 6.1 allerdings bekannt. Daraus folgt für die x-Komponente

$$\lim_{|\xi|\to\infty} (\bar{P}(x,\xi))_x = \tilde{X}\cdot e^{-\rho\pi/\omega} \qquad (11)$$

Im Bereich großer $|\xi|$-Werte wird der Streifen der Breite $\tilde{X}$ also um einen Faktor $\exp(-\rho\pi/\omega)$ komprimiert.

Für das Bild von $\tilde{\Sigma}\cap S^+$ unter $\tilde{P}$ gilt im wesentlichen dieselbe Aussage. Von besonderem Interesse ist dabei die Frage, wie viele Windungen der kritischen Spirale im Bild von $S^0\cap S^+$ liegen. Nur die von diesen Windungen gebildeten Smale Horseshoes können von der Gesamtabbildung P auch genutzt werden.

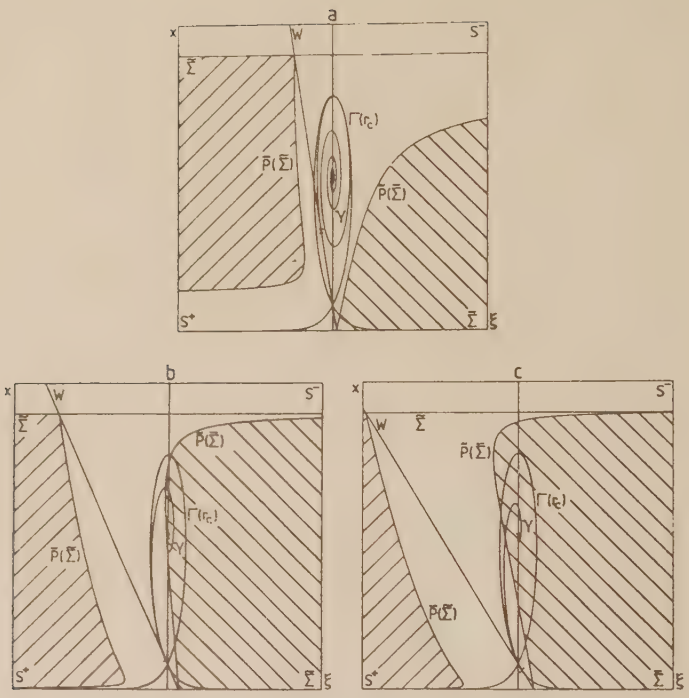


Abb. 2. (a) Liegt der homoklinoide Punkt $\bar{h}$ im Innern des Bildes von $S^0 \cap S^+$ unter $\bar{P}$, so ist damit eine wichtige Voraussetzung für Shil'nikov Chaos erfüllt.
Achsen: ξ = -2.5 .. 2.5, x = 0 .. 2.
Parameter: ρ = 5, ω = 8, $\bar{\delta}$ = 1, $\tilde{\delta}$ = 1, $\tilde{X}$ =1.8.
(b) Ist $\bar{h}$ nicht aus dem Bild von $S^0 \cap S^+$, können grundsätzlich keine homoklinen Trajektorien und das davon abgeleitete Chaos auftreten. Dennoch können die äußeren Windungen von γ Smale Horseshoes bilden.
Achsen: ξ = -2.5 .. 2.5, x = 0 .. 2.
Parameter: ρ = 5, ω = 3, $\bar{\delta}$ = 1, $\tilde{\delta}$ = 1, $\tilde{X}$ =1.8.
(c) Schneidet die kritische Spirale das Bild von $\bar{\Sigma}$ unter $\bar{P}$ höchstens in einem Punkt, so können auch keine Horseshoes mehr auftreten.
Achsen: ξ = -2.5 .. 2.5, x = 0 .. 2.
Parameter: ρ = 5, ω = 2, $\bar{\delta}$ = 1, $\tilde{\delta}$ = 1, $\tilde{X}$ = 1.8.

7.3 Beispielberechnungen

In diesem Abschnitt soll anhand von zwei beispielhaften Parametersätzen des Modellsystems das Verhalten desselben illustriert werden.

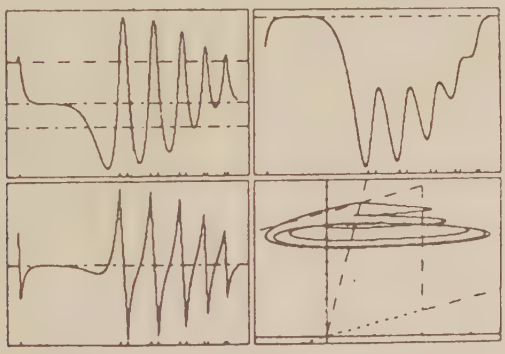


Abb. 3. Grenzzyklus der Periode fünf in einer zu Abb. 4.2 analogen Darstellung. Aus [Ka,Rö 1983].

In Abb. 4.2 wurde eine homokline Trajektorie mit 20 Durchtrittspunkten durch S gezeigt. Abb. 3 stellt einfache periodische Lösungen, die analog dazu gewonnen wurden, vor. Grenzzyklen der Periode N entsprechen Wellenzügen mit N Impulsen bei zyklischen Randbedingungen in Gleichung (1.1) (vergl. die Diskussion in 6.1 zur Situation bei natürlichen Randbedingungen) und damit Fixpunkten von P^n. Also stellt Abb. 3 einen Fixpunkt von P^5 dar. Kompliziertes, chaotisches Verhalten kann auch gefunden werden, wenn die Abbildung P keinen Smale Horseshoe ausnutzt (Abb. 4), sondern, wie im vorliegenden Beispiel, den in Abb. 5.18 vorgestellten Trennungsmechanismus für komplizierte Isolae verwendet. Im vorliegenden Fall ist der Trajektorienverlauf noch so einfach, daß P auf eine eindimensionale Abbildung reduziert werden kann; diese ist in Abb. 4b dargestellt.

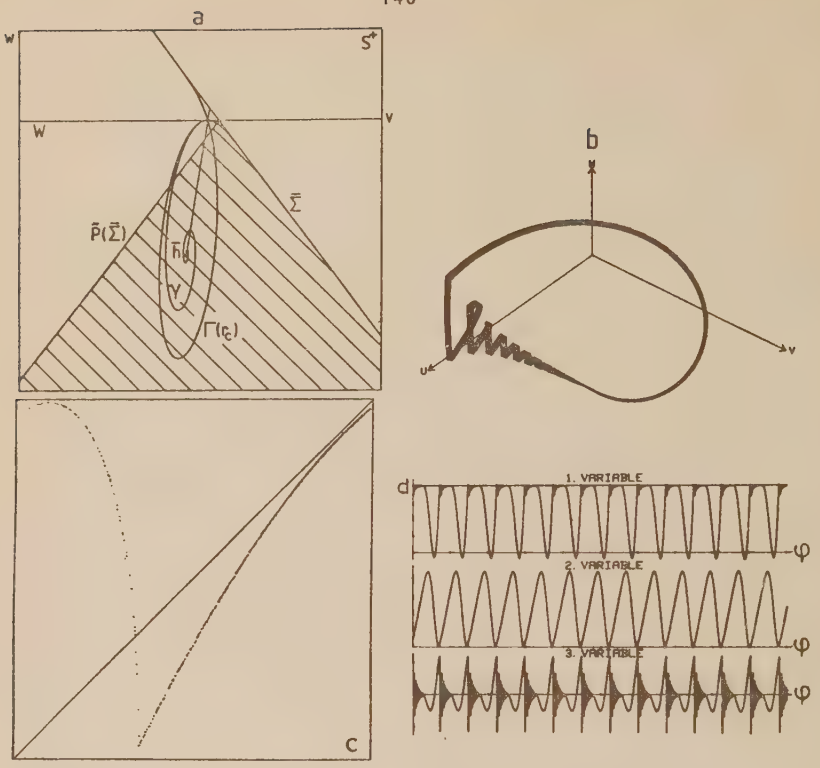


Abb. 4. Eine chaotische Lösung von Gleichung 1.5, die keinen Smale Horseshoe benutzt.
(a) Darstellung der S-Ebene mit dem cartesischen Blatt, der kritischen Spirale und dem Bild von $\bar{\Sigma}$ unter **P**.
Achsen: v = $\bar{V}$-0.075 .. $\bar{V}$+0.075, w = -0.075 .. 0.025.
(b) Trajektoriendarstellung im ursprünglichen Phasenraum und die Variablen im "Timeplot" gegen ϕ aufgetragen.
Für ϕ = 0 .. 100. Achsen: u = 0.001 ..0.011, v = 0.96 .. 1.03, w = -0.05 .. 0.05, ϕ = 0 .. 30.
(b) Reduktion der Poincaré Map auf eine eindimensionale Abbildung der Intervalls (1.003,1.008) auf der Geraden **W**. Die Abbildung wurde aus ca. 2000 Punkten in 5000 ϕ-Einheiten konstruiert.
Parameter: b = 1, d = 0.01, e = 150, ν = 10, c = 9.
(b) und (c) aus [Ka,Rö 1984].

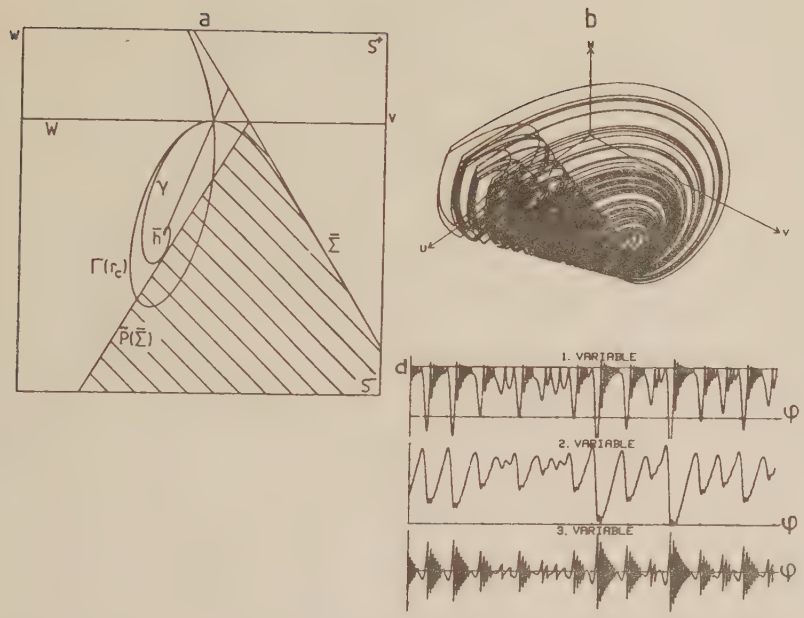


Abb. 5. Shil'nikov Chaos im Modellsystem mit unendlich vielen Horseshoes.
(a) Die Ebene S mit der kritischen Spirale und dem Bild von $\bar{\Sigma}$ unter $\bar{P}$.
Achsen: v = $\bar{V}$-0.075 .. $\bar{V}$+0.075, w = -0.075 .. 0.025.
(b) Phasenraumdarstellung und "Timeplot" der Trajektorien analog zu Abb. 4a.
Achsen: u = -0.004 .. 0.012, v = 0.86 .. 1.04, w = -0.175 .. 0.175, ϕ = 0 .. 30.
Parameter: b = 1, d = 0.01, e = 150, μ = 10, c = 3.5.
Teil (b) aus [Ka,Rö 1984]

Benutzt die Abbildung $\bar{P}$ mehrere Horseshoes, (im vorliegenden Fall - Abb. 5 - unendlich viele, da der homoklinoide Punkt im Bild von $S^{\circ} \cap S^{+}$ liegt), so wird auch das Trajektorien-

bild entsprechend kompliziert und P kann nicht mehr eindimensional approximiert werden.

Eine weitere Komplikation wäre noch durch eine Faltung der kritischen Spirale möglich. Bisher wurde für das Beispielsystem jedoch noch kein Parametersatz gefunden, der ein ρ-ω-Verhältnis liefert, das die Gleichung (5.67) erfüllt.

8 Diskussion und Ausblick

Nachdem nun alle erarbeiteten Ergebnisse vorgestellt sind, soll rückblickend nochmals die Frage nach der Rechtfertigung der vorgestellten Modellbildung aufgeworfen, sowie der Versuch unternommen werden, die Verbindungen der hier entwickelten Theorie mit anderen Ergebnissen herzustellen.

8.1 Die Güte stückweise linearer Modelle

Beim Modellieren realer Systeme (das vorgestellte Beispielsystem ist eine vereinfachte FitzHugh-Nagumo Gleichung der Nervenleitung [Fi 1961; Na 1962]) durch stückweise lineare Differentialgleichungen erhebt sich unweigerlich die Frage, inwieweit die gefundenen Eigenschaften generisch sind, oder ob es sich dabei lediglich um Artefakte handelt, die beim Glätten von Sprüngen und Abrunden von Spitzen wieder verschwinden.

Diese Frage läßt sich zwar nicht generell beantworten, da hierzu alle Eigenschaften aller möglichen Lösungen untersucht werden müßten (vergl. [Ka 1981]). Zum Auftreten von Chaos in der behandelten Systemklasse kann jedoch gesagt werden, daß dieses generisch ist, so lange der reale Steady State nicht in der Trennebene S liegt. Der Grund hierfür ist einfach einzusehen.

Ein beliebiges nichtlineares System mit einem echten Sattelfocus erfüllt immer die Voraussetzungen des Linearisierungstheorems. Somit existiert ein "innerer Bereich" um den Sattelfocus in dem sich die Dynamik des linearisierten Systems von der des nichtlinearen, ursprünglichen Systems beliebig wenig unterscheidet. Die Grenzfläche zwischen diesem inneren, linearen Bereich und dem Rest des Phasenraums, der "Außenwelt", wo die

Nichtlinearitäten zum Tragen kommen, wird zwar im allgemeinen Fall nicht flach sein, aber (falls der innere Bereich konvex ist, was sich immer erreichen läßt) aus zwei einfach zusammenhängenden Gebieten bestehen, in denen der Trajektorienfluß in die Innenwelt eintritt bzw. diese verläßt. Damit wird um den homoklinoiden Punkt (den Durchtrittspunkt der instabilen Mannigfaltigkeit durch das Analogon zu S^-) herum eine kritische Spirale existieren.

Dies führt zu dem fast paradoxen Schluß, daß das nichtlineare Phänomen Chaos für diese Systemklasse vom linearen Anteil der Dynamik erzeugt wird, während die Nichtlinearitäten, die nur in der Außenwelt wirken, lediglich für eine Rückführung des Flußes in die Innenwelt sorgen.

Bei der Untersuchung homokliner Trajektorien und dem daraus entstehenden Chaos wird gerade diese Trennung von Innen- und Außenwelt vorgenommen [Shil 1965; Gl,Sp 1983], um die Umgebung der homoklinen Trajektorie zu untersuchen. Dies ist äquivalent zu einer Betrachtung der (unendlich vielen, unendlich kleinen) innersten Windungen der kritischen Spirale. Wie die vorliegende Arbeit zeigt, kann ein chaotischer Attraktor endlicher Ausdehnung auch ohne die Existenz einer homoklinen Trajektorie analytisch untersucht werden. Dieses Chaos entsteht aufgrund der Horseshoes, die von den äußersten Windungen der kritischen Spirale gebildet werden.

Zur Behandlung eines chaotischen Attraktors endlicher Ausdehnung muß auch die Innenwelt ein endliches Volumen im Phasenraum annehmen. Hierdurch kann dann die Forderung nach einer linearen Dynamik im Innern nicht länger aufrecht erhalten werden. Wenn jedoch die Hüllfläche die oben genannten Bedingungen erfüllt und jede (außer der homoklinen) Trajektorie sich nur für ein endliches ϕ-Intervall in der Innenwelt aufhält, dann kann

aufgrund der Nichtlinearitäten die kritische Spirale zwar stetig verzerrt (und unter Umständen auch nicht mehr analytisch bestimmbar werden), ihr grundsätzlicher Charakter, und damit auch die Aussagen zum qualitativen Verhalten des Systems, bleiben jedoch erhalten.

Der offensichtliche Vorteil stückweise linearer Systeme liegt demnach darin, das Verhalten der kritischen Spirale von ihrem Zentrum bis zur äußersten Windung analytisch fassenbar zu machen. Dies liefert eine vereinheitlichte Betrachtungsweise bisher scheinbar beziehungslos nebeneinander stehender Phänomene. Während unendlich kleines Chaos analytisch beschrieben wurde, ergaben sich bei der numerischen Behandlung von Gleichung (2.9) "Haken" oder "Spitzen" [Ue,Rö 1984]. Aus Kapitel 5 ist jedoch klargeworden, daß es sich sowohl bei den unendlich kleinen (analytisch faßbaren) als auch bei den endlichen (numerisch gefundenen) Strukturen um die kritische Spirale bzw. das davon abgeleitete Bild der Geraden W unter $\bar{P}$ handelt.

8.2 Die Komplexität der Lösungen

Bei der Diskussion des qualitativen Verhaltens einzelner Systeme wurde in dieser Arbeit immer wieder von mehr oder minder komplizierten chaotischen Verhaltensmustern gesprochen, ohne daß der Begriff der Komplexität eines Musters schärfer gefasst wurde. Dies bereitet auch erhebliche Schwierigkeiten, da der chaotische Attraktor (im Drei-Variablen-System) von einem stabilen Steady State oder Limit Cycle zwar durch das Vorzeichenmuster der Lyapunov Exponenten unterscheidbar ist, im chaotischen Regime selbst aber die Größe des positiven Exponenten kein Maß für die Kompliziertheit des Attraktors darstellt.

Hier sollen nun zwei unterschiedliche Ansätze vorgestellt werden, die zur Klärung dieser Frage geeignet erscheinen.

Die erste Herangehensweise, die implizit schon an verschiedenen Stellen anklang, stellt die Frage nach der Anzahl der von der Gesamtabbildung benutzten Smale Horseshoes. Da jeder einzelne Horseshoe chaotisches Verhalten impliziert, sollte das Zusammenspiel mehrerer Horseshoes das Chaos noch weiter verkomplizieren. (Bildung von "Cycles" [Ne,Pa 1976].)

Die Frage nach der Anzahl ist jedoch nicht leicht zu beantworten, da jede endliche Iteration des in Abschnitt 7.2 vorgestellten Verfahrens lediglich eine obere Schranke für die Anzahl des Horseshoes liefern kann.

Der zweite Ansatz versucht, eine aus der symbolischen Dynamik bekannte Größe, die topologische Entropie, zu bestimmen. Dabei erweist es sich als vorteilhaft, daß der ϕ-Raum nicht strukturlos ist, sondern sich auf natürliche Weise in Intervalle der ungefähren Länge π/ω unterteilen läßt [Ev 1982; Ka, Rö 1983]. Überschreitet die Lösungstrajektorie in einem sol-

chen Intervall die Grenze $u=\delta$, so erhält das Intervall das Symbol "1", andernfalls wird ihm das Symbol "0" zugeordnet. Dies führt bei (im Phasenraum) beschränkten Lösungen (nur solche sollen betrachtet werden) auf unendliche Symbolfolgen, die mit den Techniken der symbolischen Dynamik analysiert werden können.

Auch hier müssen (im Prinzip) unendlich viele Abbildungsschritte durchlaufen werden, bevor das Ergebnis vorliegt. Diese Herangehensweise eröffnet aber auch die Möglichkeit, endliche Wellenzüge zu analysieren [Ka,Rö 1984]. Betrachten wir hierzu die Funktion

$$h(m) := \frac{1}{m} \log_2 N(m) \qquad (1)$$

wobei $N(m)$ die Anzahl der verschiedenen Symbolfolgen der Länge m in einem Muster (in diesem Fall einem Wellenzug) ist [Cr, Pa 1983].

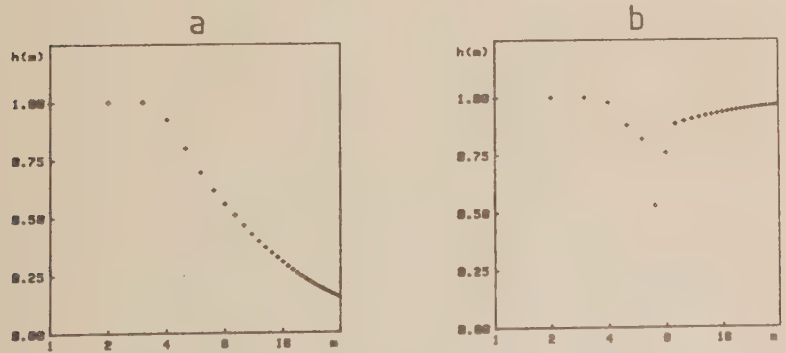


Abb. 1. Darstellung der Funktion $h(m)$. Bei Wellenzügen endlicher Länge verschwindet die Funktion für $m \to \infty$ (a). Ein Kennzeichen chaotischer Lösungen (b) ist es, daß h auch im Limes von 0 verschieden ist. Dieser Grenzwert kann dann als Maß für die Komplexität des Chaos dienen.

Diese Funktion h ist hier für einen endlichen Wellenzug (Abb. 16c aus [Ka,Rö 1983]) sowie für einen Ausschnitt aus einem unendlichen Wellenzug (Abb. 7.5) dargestellt. Der Grenzwert von h für $m \to \infty$ ist die topologische Entropie. Diese ist nur für chaotische Lösungen von Null verschieden und kann, wie erwähnt, als Maß für die Komplexität der Lösungen benutzt werden.

Für alle endlichen Symbolfolgen verschwindet die topologische Entropie zwar (wegen des $1/m$-Terms), der Verlauf von h für Wellenzüge der Länge 2, 3 etc. kann aber einen Hinweis darauf liefern, ob für ein System chaotische Lösungen zu erwarten sind [Ka,Rö 1984].

8.3 Schluß

Die vorliegende Arbeit zeigt, wie reich an Struktur bereits einfache lineare Dynamiken sind. Die Vielfalt der Lösungen manifestiert sich allerdings erst duch das nichlineare Zusammenwirken der Teilsysteme. Diese Aussage kann sogar so weit verschärft werden, daß erst die Interaktion oder Wechselwirkung der einzelnen Konstituenten eines Systems das Phänomen einer chaotischen Lösung erzeugt.

Da die grundlegenden Strukturen der Poincaré Halbabbildungen nun geklärt und analytisch greifbar sind, wäre es eine lohnende und reizvolle Aufgabe, alle (sechs) möglichen Systemklassen mit zwei linearen Teildynamiken und flacher Trennfläche systematisch auf die Interaktion zwischen den Teildynamiken und die daraus resultierenden dynamischen Grundmuster hin zu untersuchen.

Das vollständige Resultat könnte (wenn es wirklich erreichbar ist) dann vielleicht als eine Art "Basis-Kartographie" für das mögliche generische Verhalten von nichtlinearen Drei-Variablen-Systemen im Allgemeinen dienen.

Literaturverzeichnis

[Ca 1977] G.A. Carpenter, J. Differential Equations **23**, 335 (1977).

[Ca 1979] G.A. Carpenter, SIAM J. Appl. Math. **36**, 334 (1979).

[Co,Ec 1980] P. Collet und J.-P. Eckmann, "Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems", Birkhäuser, Boston (1980).

[Cr,Pa 1983] J.P. Crutchfield und N. Packard, Physica D **7**, 201 (1983).

[Ev 1982] J.W. Evans, N. Fenichel und J.A. Feroe, SIAM J. Appl. Math. **42**, 219 (1982).

[Fa 1982] J.D. Farmer, Physica D **4**, 366 (1982).

[Fei,Or 1977] D. Fein und P. Ortoleva, J. Chem. Phys. **67**, 2119 (1977).

[Fe 1982] J.A. Feroe, SIAM J. Appl. Math. **42**, 235 (1982).

[Fi 1961] R. FitzHugh, Biophys. J. **1**, 445 (1961).

[Gea 1971] C.W. Gear, "Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations", Englewood Cliffs, Prentice-Hall, London (1971).

[Gi,Ep 1981] E.D. Gilles und U. Epple, "Non-Linear Wave Propagation and Model Reduction of the Fixed-Bed Reactor", in "Modelling of Chemical Reaction Systems" (K.H. Ebert, P. Deuflhard und W. Jäger, Herausgeber), Springer Verlag, Heidelberg (1981).

[Gl,Sp 1983] P. Glendinning und C.T. Sparrow, "Local and Global Behaviour near Homoclinic Orbits", Preprint (1983).

[Gö,Se 1975] F. Göbber und F.F. Seelig, J. Math. Biol. **2**, 79 (1975).

[Gu,Mi 1980] I. Gumowski und C. Mira, "Dynamique Chaotique, Transformations Ponctuelles, Transition Ordre-Disordre", Cepadues Editions, Toulouse (1980).

[Ha 1982] S. Hastings, SIAM J. Appl. Math. **42**, 247 (1982).

[Hi,Sm 1974] M.W. Hirsch und S. Smale, "Differential Equations, Dynamical Ststems, and Linear Algebra", Academic Press, New York (1974).

[Ho,Hu 1952] A.L. Hodgkin und A.F. Huxley, J. Physiol. (Lond.) **117**, 500 (1952).

[Ka 1981] C. Kahlert, "Dispersionsrelationen für eine Klasse von Reaktions-Diffusions-Gleichungen", Diplomarbeit, Tübingen (1981).

[Ka,Rö 1983] C. Kahlert und O.E. Rössler, Z. Naturforsch. **38a**, 648, (1983).

[Ka,Rö 1984] C. Kahlert und O.E. Rössler, "Chaos as a Limit in a Boundary Value Problem", eingereicht bei Phys. Rev. Lett. (1984).

[Kar,Ka 1977] H.R. Karfunkel und C. Kahlert, J. Math. Biol. **4**, 183 (1977).

[Na 1962] J. Nagumo, S. Arimoto und S. Yoshizawa, Proc. IRE **50**, 2061 (1962).

[Ne,Pa 1976] S. Newhouse und J. Palis, Asterisque **31**, 44 (1976).

[Po 1899] H. Poincaré, "Les Methodes Nouvelles de la Mechanique Celeste", Vol. III, Gauthier-Villars, Paris (1899).

[Ri,Ke 1973] J. Rinzel und J.B. Keller, Biophys. J. **13**, 270 (1973).

[Rö 1977] O.E. Rössler, Bull. Math. Biol. **39**, 275 (1977).

[Rö 1979] R. Rössler, F. Götz und O.E. Rössler, BioPhys. J. **25a**, 216 (1979).

[Rö 1981] O.E. Rössler, "The Gluing-Together Principle and Chaos" in "Nonlinear Problems of Analysis in Geometry and Mechanics" (M. Atteia, D. Bancel und I. Gumowski, Herausgeber), Pitman, Boston (1981).

[Ru 1979] D. Ruelle, "Sensitive Dependence on Initial Condition and Turbulent Behavior of Dynamical Systems" in "Bifurcation Theory and Applications in Scientific Disciplines" (O. Gurel und O.E. Rössler, Herausgeber), Annals of the New York Academy of Sciences, **Vol. 316**, New York (1979).

[Shil 1965] L.P. Shil'nikov, Soviet Math. Docl. **6**, 163 (1965).

[Shil 1970] L.P. Shil'nikov, Math. USSR Sbornik **10**, 91 (1970).

[Sm 1967] S. Smale, Bull. Am. Math. Soc. **73**, 747 (1967).

[Sp 1981] C.T. Sparrow, J. Math. Analysis and Appl. **83**, 275 (1981).

[Ue 1982] B. Uehleke, "Chaos in einem stückweise linearen System: Analytische Resultate", Dissertation, Tübingen (1982).

[Ue,Rö 1983] B. Uehleke und O.E. Rössler, Z. Naturforsch. **38a**, 1107 (1983).

[Ue,Rö 1984] B. Uehleke und O.E. Rössler, Z. Naturforsch. **39a**, 342 (1984).

[Win 1980] A.T. Winfree, The Geometry of Biological Time, Springer Verlag, New York (1980).

LEBENSLAUF

13. Dezember 1953	geboren in Heidenheim/Brenz als Sohn von Lotte und Günther Kahlert.
April 1960 - März 1964	Grundschule in Königsbronn.
April 1964 - Juni 1972	Gymnasium Oberkochen, Reifeprüfung am 19. 6. 1972.
ab Oktober 1973	Studium der Physik und Biochemie in Tübingen.
27. September 1977	Vordiplom im Physik.
5. Oktober 1977	Vordiplom in Biochemie.
Januar 1980 - Mai 1981	Diplomarbeit mit dem Titel "Dispersionsrelationen für eine Klasse von Reaktions-Diffusions-Gleichungen" unter Anleitung von Prof. O.E. Rössler am Lehrstuhl für Theoretische Chemie der Universität Tübingen.
15. Oktober 1981	Diplom in Physik.
April 1982 - Juni 1984	Anfertigung der vorliegenden Dissertation mit dem Titel "Unendliche nichtperiodische Wellenzüge in einer Klasse von Reaktions-Diffusions-Gleichungen - Analytische Eigenschaften von Poincare Halbabbildungen" unter der Anleitung von Prof. O.E. Rössler am Lehrstuhl für Theoretische Chemie der Universität Tübingen.

Meine akademischen Lehrer waren:

Baumann, Becker, Dittrich, Fischer, Gönnenwein, Grandy, Großer, Hadeler, Guglielmi, Hagenmaier, Hanack, Hübener, Kramer, Krüger, Lenz, Lindner, Mack, Mauser, Mecke, Metzner, Mitter, Möllenstedt, Mühleisen, E. Müller, Oberhammer, Oelkrug, Pfister, Probst, Rieckers, Rössler, Rüdorff, Schief, Schlotterbeck, Schmid, Schott, Schwinger, Seelig, Sohr, Speidel, Staudt, Strähle, Stumpf, Viebahn, Voelter, Weber, Wegmann, Weitzel, Weser, Wildermuth, Wittern, M. Wolf.

D. GRÄBNER
Dissertations- u. Offsetdruckerei
Gotenstraße 3
8602 Altendorf bei Bamberg
Telefon 09545 / 8791